

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 1

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A - TRẮC NGHIỆM

1.30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Phát biểu nào dưới đây là đúng?

- A. Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.
- B. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$.

Lời giải

Chọn B

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $(a; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.

1.31. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = -x^3 + 3x^2 - 9x$.
- B. $y = -x^3 + x + 1$.
- C. $y = \frac{x-1}{x-2}$.
- D. $y = 2x^2 + 3x + 2$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 9x$ có:

$$y' = -3x^2 + 6x - 9 = -3(x^2 - 2x + 1) - 6 = -3(x-1)^2 - 6 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó, hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 9x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

1.32. Hàm số nào dưới đây không có cực trị?

- A. $y = |x|$.
- B. $y = x^4$.
- C. $y = -x^3 + x$.
- D. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$

$$\text{Có } y' = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1. \text{ Do đó hàm số } y = \frac{2x-1}{x+1} \text{ không có cực trị.}$$

1.33. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^2 \ln x$ là

- A. $\frac{1}{e}$.
- B. $-\frac{1}{e}$.
- C. $-\frac{1}{2e}$.
- D. $\frac{1}{2e}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định là $D = (0; +\infty)$.

Có $y' = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$. Có $y' = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ (do $x > 0$).

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y	0	$-\frac{1}{2e}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số là $-\frac{1}{2e}$.

1.34. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = (x-2)^2 \cdot e^x$ trên đoạn $[1; 3]$ là

A. 0.

B. e^3 .

C. e^4 .

D. e.

Lời giải

Chọn B

Có $y' = 2(x-2)e^x + (x-2)^2 e^x = x(x-2)e^x$. Có $y' = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại) hoặc $x = 2$ (thỏa mãn).

Có $y(1) = e$; $y(2) = 0$; $y(3) = e^3$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là e^3 khi $x = 3$.

1.35. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

B. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

C. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Lời giải

Chọn B

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số, vì

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận đứng.

1.36. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}$ là

- A. $y = -2$. B. $y = 1$. C. $y = x + 2$. D. $y = x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2} = x - \frac{2}{x + 2}$

Lại có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{2}{x + 2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x + 2} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - \frac{2}{x + 2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{x + 2} = 0$

Do đó, đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}$.

1.37. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	0	+
$f(x)$	1	7	5	$+\infty$	-1

Khẳng định nào sau đây là sai?

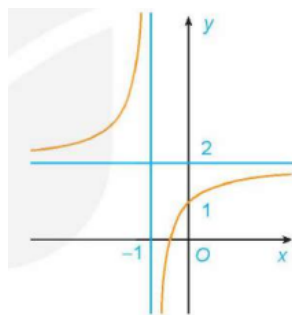
- A. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.
 B. Đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.
 C. Đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.
 D. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

Chọn D

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 7$ nên đường thẳng $x = 1$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

1.38. Đồ thị trong Hình 1.37 là đồ thị của hàm số:



Hình 1.37

A. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+3}{1-x}$.

Lời giải

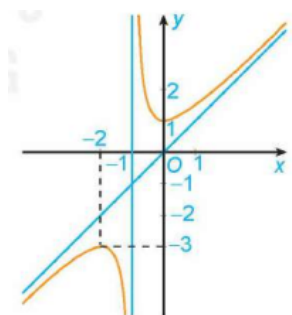
Chọn B

Đồ thị hàm số trong hình 1.37 có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Xét hàm số: $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2$ nên đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có tiệm cận ngang là

$y = 2$. Đường thẳng $y = 2$ không là tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$; $y = \frac{x+3}{1-x}$; $y = \frac{x+2}{x+1}$.

1.39. Đồ thị trong Hình 1.38 là đồ thị của hàm số:



Hình 1.38

A. $y = x - \frac{1}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x+1}$.

D. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D

+) Đồ thị ở Hình 1.38 có dạng $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ ($a \neq 0$; $p \neq 0$) và đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu nên loại đáp án B.

+) Vì đồ thị hàm số đi qua $(-2; -3)$ nên loại đáp án C.

+) Vì đồ thị hàm số đi qua $(0; 1)$ nên loại đáp án A.

+) Xét hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x+1} = x + \frac{1}{x+1}$.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = -\infty; \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = +\infty$$

Do đó $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$$

Do đó $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

B - TỰ LUẬN

1.40. Xét chiều biến thiên và tìm các cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;

b) $y = x^4 - 2x^2 - 1$;

c) $y = \frac{2x-1}{3x+1}$;

d) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

Lời giải

a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2, y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	+
y	$-\infty$	0	$+\infty$

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ không có cực trị.

b) $y = x^4 - 2x^2 - 1$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = -1$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1; x = 1$ và $y_{CT} = -2$.

c) $y = \frac{2x-1}{3x+1}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$

Có $y' = \frac{2(3x+1) - 3(2x-1)}{(3x+1)^2} = \frac{5}{(3x+1)^2} > 0, \forall x \neq -\frac{1}{3}$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ và $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Hàm số không có cực trị.

d) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Có $y' = \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2 + 2x + 2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$. Có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và $y_{CD} = -2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $y_{CT} = 2$.

1.41. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x+1}{3x-2}$ trên nửa khoảng $[2; +\infty)$;

b) $y = \sqrt{2-x^2}$.

Lời giải

a) $y = \frac{2x+1}{3x-2}$ trên nửa khoảng $[2; +\infty)$. Có $y' = \frac{2(3x-2) - 3(2x+1)}{(3x-2)^2} = \frac{-7}{(3x-2)^2} < 0, \forall x \in [2; +\infty)$

Do đó $\max_{[2; +\infty)} y = y(2) = \frac{5}{4}$ và hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

b) Tập xác định $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

Có $y' = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn). Có $y(-\sqrt{2}) = 0$; $y(0) = \sqrt{2}$; $y(\sqrt{2}) = 0$

Vậy $\max_{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]} y = y(0) = \sqrt{2}$; $\min_{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]} y = y(-\sqrt{2}) = y(\sqrt{2}) = 0$

1.42. Tìm các tiệm cận của mỗi đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{3x-2}{x+1}$;

b) $y = \frac{x^2+2x-1}{2x-1}$

Lời giải

a) $y = \frac{3x-2}{x+1}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{3x-2}{x+1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{3x-2}{x+1} = +\infty$

Do đó $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3$

Do đó $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) $y = \frac{x^2+2x-1}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + \frac{1}{4(2x-1)}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} y = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{x^2+2x-1}{2x-1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} y = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{x^2+2x-1}{2x-1} = -\infty$

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x-1}{2x-1}$ là đường thẳng $x = \frac{1}{2}$.

Ta có: $y = \frac{x^2+2x-1}{2x-1} = \frac{x}{2} + \frac{5}{4} + \frac{1}{4(2x-1)}$

Do đó, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[y - \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{4} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4(2x-1)} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[y - \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{4} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4(2x-1)} = 0$

Vậy tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x-1}{2x-1}$ là đường thẳng $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{4}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x-1}{2x-1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x-1}{2x-1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x-1}{2x-1}$ không có tiệm cận ngang.

1.43. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 12$;

b) $y = \frac{2x-1}{x+1}$

c) $y = \frac{x^2 - 2x}{x-1}$.

Lời giải

a) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 12$

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên

+) Có $y' = -3x^2 + 12x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

+) Trên khoảng $(1; 3)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến

Trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến.

+) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = 8$; Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ và $y_{CD} = 12$.

+) Giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 6x^2 - 9x + 12) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 6x^2 - 9x + 12) = -\infty$$

+) Bảng biến thiên

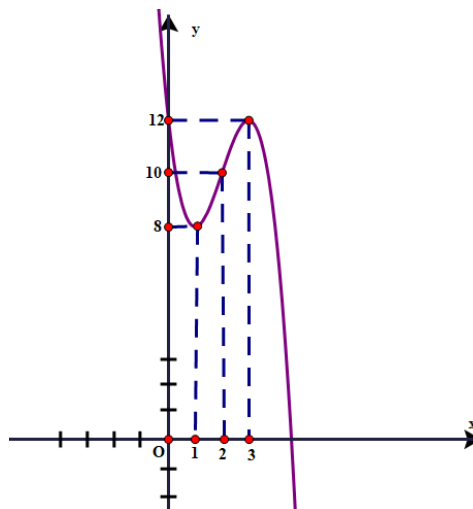
x	$-\infty$	1		3		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$-\infty$
			8		12	

3. Đồ thị

+) Giao điểm của đồ thị với trục Oy là $(0; 12)$.

+) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 8)$; $(3; 12)$.

+) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng $I(2; 10)$.



b) $y = \frac{2x-1}{x+1}$

1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2. Sự biến thiên: $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \forall x \neq -1$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$

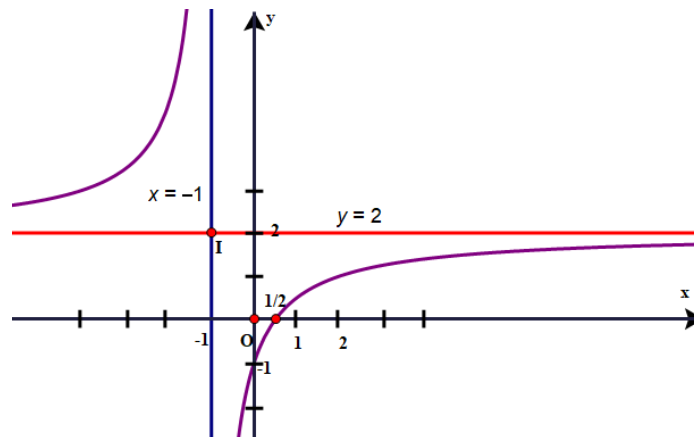
Do đó, đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y = 2$ làm tiệm cận ngang. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2 ↗	$\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$	↘ 2

3. Đồ thị: Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0; -1)$.

$y = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1; 2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



c) $y = \frac{x^2 - 2x}{x-1}$

1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

2. Sự biến thiên:

Ta có: $y = \frac{x^2 - 2x}{x-1} = x-1 - \frac{1}{x-1}$

$$y' = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 + 1}{(x-1)^2} > 0 \forall x \neq 1$$

Do đó, hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x-1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x-1} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x}{x-1} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x}{x-1} = -\infty$$

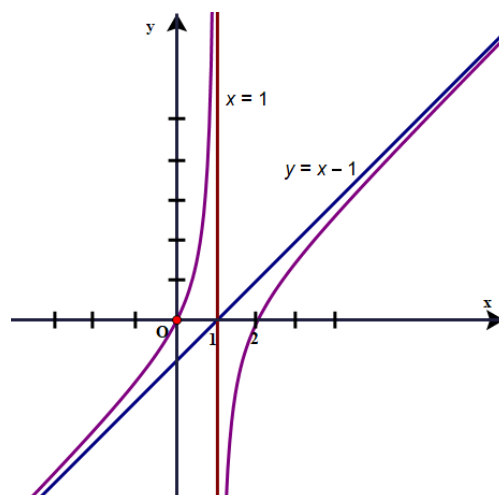
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x-1 - \frac{1}{x-1} - (x-1) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x-1 - \frac{1}{x-1} - (x-1) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x-1} = 0$$

Do đó, đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y=x-1$ làm tiệm cận xiên. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

3. Đồ thị:



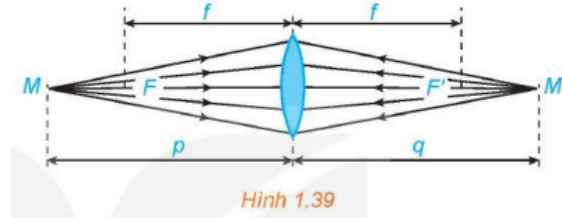
Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0; 0)$.

$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Đồ thị hàm số giao với trục hoành tại các điểm $(0; 0)$ và $(2; 0)$

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(1;0)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

1.44. Xét một thấu kính hội tụ có tiêu cự f (H.1.39). Khoảng cách p từ vật đến thấu kính liên hệ với khoảng cách q từ ảnh đến thấu kính bởi hệ thức: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$.



- Viết công thức tính $q = g(p)$ như một hàm số của biến $p \in (f; +\infty)$.
- Tính các giới hạn $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(p)$; $\lim_{p \rightarrow f^+} g(p)$ và giải thích ý nghĩa các kết quả này.
- Lập bảng biến thiên của hàm số $q = g(p)$ trên khoảng $(f; +\infty)$.

Lời giải

a) Ta có $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{p-f}{pf} \Leftrightarrow q = \frac{pf}{p-f}$

Do đó $q = g(p) = \frac{pf}{p-f}$ với $p \in (f; +\infty)$.

b) $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{pf}{p-f} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{f}{1 - \frac{f}{p}} = f$; $\lim_{p \rightarrow f^+} g(p) = \lim_{p \rightarrow f^+} \frac{pf}{p-f} = +\infty$

Ý nghĩa $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(p) = f$ là khoảng cách từ vật đến thấu kính tiến ra vô cùng thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính xấp xỉ tiêu cự.

$\lim_{p \rightarrow f^+} g(p) = +\infty$ nghĩa là khoảng cách từ vật đến thấu kính tiến gần về tiêu cự f thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính càng lớn.

c) Ta có $q' = \frac{f(p-f) - pf}{(p-f)^2} = \frac{-f^2}{(p-f)^2} < 0, \forall p \in (f; +\infty)$

Do đó hàm số $q = g(p)$ nghịch biến trên khoảng $(f; +\infty)$.

p	f	$+\infty$
q'	-	
q		

1.45. Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:

$N(t) = 100e^{0,012t}$ ($N(t)$ được tính bằng triệu người $0 \leq t \leq 50$).

- a) Ước tính dân số của quốc gia này vào các năm 2030 và 2035 (kết quả tính bằng triệu người, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).
- b) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0; 50]$. Xét chiều biến thiên của hàm số $N(t)$ trên đoạn $[0; 50]$.
- c) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vào năm nào tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm?

Lời giải

a) Dân số của quốc gia này vào các năm 2030 ($t = 7$) là: $N(7) = 100e^{0,012 \cdot 7} = 108,763$ triệu người.

Dân số của quốc gia này vào các năm 2035 ($t = 12$) là: $N(12) = 100e^{0,012 \cdot 12} = 115,488$ triệu người.

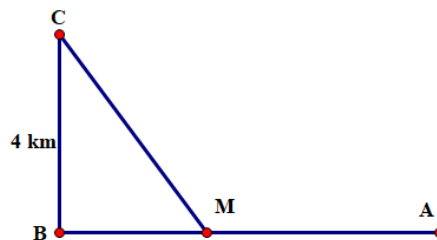
b) Ta có $N'(t) = 100 \cdot 0,012 \cdot e^{0,012t} = 1,2 \cdot e^{0,012t} > 0$ với mọi $t \in [0; 50]$.

Do đó hàm số $N(t)$ luôn đồng biến trên đoạn $[0; 50]$.

c) Theo đề có: $1,2 \cdot e^{0,012t} = 1,6 \Leftrightarrow e^{0,012t} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{4}{3}}{0,012} \approx 23,97$ năm.

Vậy vào năm 2046 tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.

1.46. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như Hình 1.40. Khoảng cách từ C đến B là 4km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng. Xác định vị trí điểm M trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.



Hình 1.40

Lời giải

Gọi khoảng cách BM là x (km), ($0 \leq x \leq 10$).

Khi đó khoảng cách AM là $10 - x$ (km).

Khoảng cách CM là $\sqrt{16 + x^2}$ (km).

Khi đó chi phí lắp đặt dây điện là: $f(x) = 30(10 - x) + 50\sqrt{16 + x^2}$ (triệu đồng).

Bài toán trở thành tìm x để $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Có } f'(x) = -30 + \frac{50x}{\sqrt{16 + x^2}}$$

$$\text{Có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -30 + \frac{50x}{\sqrt{16+x^2}} = 0 \Leftrightarrow -30\sqrt{16+x^2} + 50x = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{16+x^2} = 5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9(16+x^2) = 25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Ta có $f(0) = 500$; $f(3) = 460$; $f(10) = 100\sqrt{29}$.

Do đó chi phí nhỏ nhất để lắp dây điện là 460 triệu đồng khi M cách B một đoạn 3 km trên đoạn AB.

PHẦN 2. BÀI TẬP THÊM

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $f(-6) > f(-5)$. **B.** $f(1) > f(2)$. **C.** $f(5) < f(7)$. **D.** $f(-3) > f(-1)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 2. Kết luận nào sau đây là đúng đối với hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$?

- A.** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

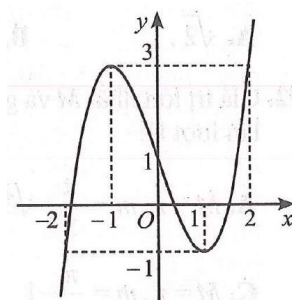
Câu 3. Trong các hàm số sau, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

- A.** $y = e^{-x+2}$. **B.** $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)$. **C.** $y = -x^3 + 2x^2 + 1$. **D.** $y = -x + 1 + \frac{1}{x}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như Hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty; 3)$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(-1; +\infty)$.

D. $(-1; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	4	0	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)^2(x-1)(x+2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Điểm cực đại của hàm số đã cho là:

A. -1.

B. -2.

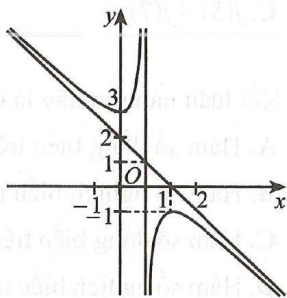
C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ (với $a, m \neq 0$) có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Giá trị cực đại của hàm số là:



A. 0.

B. -1

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Câu 8. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng:

A. -5.

B. -2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{1-x^2}$ bằng:

A. $\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Câu 10. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x - 2\sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$ lần lượt là:

A. $M = \pi, m = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$.

B. $M = \pi, m = 0$.

C. $M = \pi, m = \frac{\pi}{6} - 1$.

D. $M = \pi, m = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 11. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x \cdot \ln x$ trên đoạn $[1; e^2]$ bằng:

A. $M = 0, m = -\frac{1}{e}$.

B. $M = \frac{1}{e}, m = 0$.

C. $M = 2e^2, m = 0$.

D. $M = 2e^2, m = -\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 12. Đồ thị hàm số nào sau đây nhận đường thẳng $y = -2$ làm tiệm cận ngang?

A. $y = \frac{2x-1}{-1+x}$.

B. $y = \frac{-x+1}{2x-1}$.

C. $y = \frac{x+1}{x+2}$.

D. $y = \frac{-2x+1}{x-3}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 13. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2 + x - 2}{x - 2}$ là đường thẳng:

A. $y = -3x + 7$.

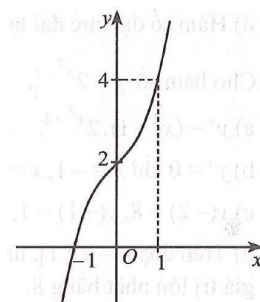
B. $y = 3x + 7$.

C. $y = 3x - 7$.

D. $y = -3x - 7$.

Lời giải

Chọn B

Câu 14. Đường cong ở Hình vẽ là đồ thị của hàm số:

A. $y = 2x^3 + 2$.

B. $y = x^3 - x^2 + 2$.

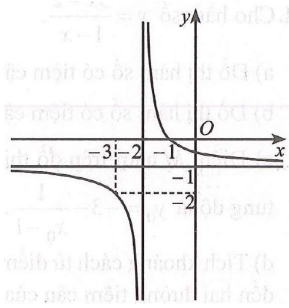
C. $y = -x^3 + 3x + 2$.

D. $y = x^3 + x + 2$.

Lời giải

Chọn D

Câu 15. Đường cong ở Hình vẽ là đồ thị của hàm số:



A. $y = \frac{-2x+1}{x+1}$.

B. $y = \frac{x+1}{-x-2}$.

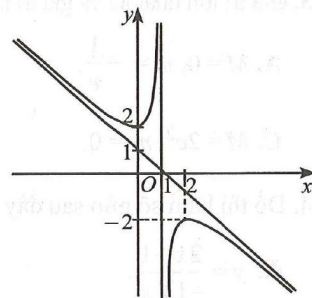
C. $y = \frac{-x+1}{x+2}$.

D. $y = \frac{x-2}{x+2}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 16. Đường cong ở Hình vẽ là đồ thị của hàm số:



A. $y = \frac{x^2+2x-2}{x-1}$.

B. $y = \frac{-x^2+2x+2}{x-1}$.

C. $y = \frac{-x^2+2x-2}{x-1}$.

D. $y = \frac{-x^2+x-2}{x-1}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 17. Trong mỗi ý a), b), c), d) chọn phương án đúng hoặc sai. Cho hàm số $y = x \cdot e^x$.

a) $y' = e^x + x \cdot e^x$.

b) $y' = 0$ khi $x = -1, x = 0$.

c) $y' > 0$ khi $x \in (-1; +\infty)$ và $y' < 0$ khi $x \in (-\infty; -1)$.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Lời giải

a) Đ, b) S, c) Đ, d) S.

Câu 18. Trong mỗi ý a), b), c), d) chọn phương án đúng hoặc sai. Cho hàm số $y = 2^{x^2-1}$.

a) $y' = (x^2 - 1) \cdot 2^{x^2-2}$.

b) $y' = 0$ khi $x = -1, x = 1$.

c) $y(-2) = 8, y(-1) = 1, y(1) = 1$.

d) Trên đoạn $[-2; 1]$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1, giá trị lớn nhất bằng 8.

Lời giải

a) S, b) S, c) Đ, d) S.

Câu 19. Trong mỗi ý a), b), c), d) chọn phương án đúng hoặc sai. Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{1-x}$.

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

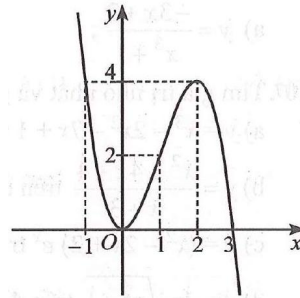
c) Điểm M nằm trên đồ thị hàm số có hoành độ $x_0 \neq 1$ thì tung độ là $y_0 = -3 - \frac{1}{x_0 - 1}$.

d) Tích khoảng cách từ điểm M bất kì nằm trên đồ thị hàm số đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đó bằng 1.

Lời giải

a) $\mathbb{D}$, b) S , c) $\mathbb{D}$, d) $\mathbb{D}$.

Câu 20. Trong mỗi ý a), b), c), d) chọn phương án đúng hoặc sai. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như Hình vẽ



a) Phương trình $f(x) = 4$ có hai nghiệm $x = -1, x = 2$.

b) Phương trình $f(x) = -1$ có hai nghiệm.

c) Phương trình $f(x) = 2$ có ba nghiệm.

d) Phương trình $f(f(x)) = 4$ có sáu nghiệm.

Lời giải

Đường thẳng $y = 4$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm có hoành độ bằng -1 và 2 nên phương trình $f(x) = 4$ có hai nghiệm $x = -1, x = 2$.

☐ Đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại một điểm nên phương trình $f(x) = -1$ có một nghiệm.

☐ Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số tại ba điểm nên phương trình $f(x) = 2$ có ba nghiệm.

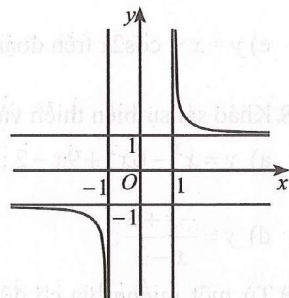
☐ Ta có: $f(f(x)) = 4$ khi $f(x) = -1$ hoặc $f(x) = 2$.

Với $f(x) = -1$, phương trình có một nghiệm.

Với $f(x) = 2$, phương trình có ba nghiệm phân biệt. Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

Đáp án: a) $\mathbb{D}$, b) S , c) $\mathbb{D}$, d) S .

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, đồ thị hàm số là đường cong và có bốn đường tiệm cận như Hình vẽ



Căn cứ vào đồ thị hàm số:

- Viết phương trình đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Lập bảng biến thiên của hàm số.

Lời giải

- Tiệm cận đứng: $x = -1, x = 1$; tiệm cận ngang: $y = -1, y = 1$.
- Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	-			-
y	$-1 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 1$	

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-6	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

- Tìm điểm cực đại, cực tiểu; giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số.
- Viết phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang không? Vì sao?
- Tìm công thức xác định hàm số, biết hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = \frac{x^2 + bx + c}{x + n}$.

Lời giải

- Điểm cực đại: $x = -4$, điểm cực tiểu $x = 0$, giá trị cực đại $y_{\text{CD}} = -6$, giá trị cực tiểu $y_{\text{CT}} = 2$.
- Tiệm cận đứng: $x = -2$.
- Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang. Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

d) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$.

Câu 23. Tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{3x - 4}{-2x + 5}$

b) $y = \frac{3x^3 + x - 2}{x^3 - 8}$;

c) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

Lời giải

Tiệm cận đứng: $x = \frac{5}{2}$, tiệm cận ngang: $y = -\frac{3}{2}$.

b) Tiệm cận đứng: $x = 2$, tiệm cận ngang: $y = 3$.

c) Tiệm cận đứng: $x = 0$, hai tiệm cận ngang: $y = 1, y = -1$.

Câu 24. Tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và tiệm cận xiên (nếu có) của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{-3x + 2}{x^3 + 1}$;

b) $y = \frac{x^2 - 1}{2x + 1}$;

c) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Lời giải

a) Tiệm cận đứng là: $x = -1$, tiệm cận ngang là: $y = 0$, đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

b) Tiệm cận đứng là: $x = -\frac{1}{2}$, đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang, tiệm cận xiên là: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

c) Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, hai tiệm cận ngang là: $y = 1, y = -1$, đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.

Câu 25. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của mỗi hàm số:

a) $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 1$ trên đoạn $[-3; 2]$;

b) $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 3}$ trên đoạn $[-1; 3]$;

c) $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ trên đoạn $[-2; 1]$;

d) $y = \ln\sqrt{x^2 + 1}$ trên đoạn $[-\sqrt{3}; 2\sqrt{2}]$;

e) $y = x + \cos 2x$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải

a) $\min_{[-3; 2]} y = -23, \max_{[-3; 2]} y = 5$.

b) $\min_{[-1; 3]} y = \frac{1}{2}, \max_{[-1; 3]} y = \frac{25}{6}$.

c) $\min_{[-2; 1]} y = \frac{10}{e^2}, \max_{[-2; 1]} y = e$.

d) $\min_{[-\sqrt{3}; 2\sqrt{2}]} y = 0, \max_{[-\sqrt{3}; 2\sqrt{2}]} y = \ln 3$.

e) $\min_{\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]} y = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \max_{\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]} y = \frac{\pi}{4}$.

Câu 26. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

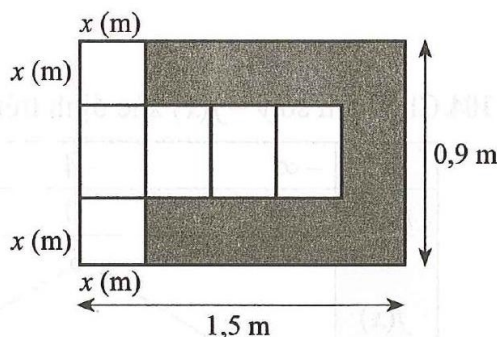
a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$;

- b) $y = -x^3 - x$;
- c) $y = \frac{2x-4}{x+1}$;
- d) $y = \frac{-x+3}{x-2}$
- e) $y = \frac{x^2-x+2}{x+1}$;
- g) $y = \frac{-x^2+4}{2x}$.

Lời giải

Học sinh tự làm.

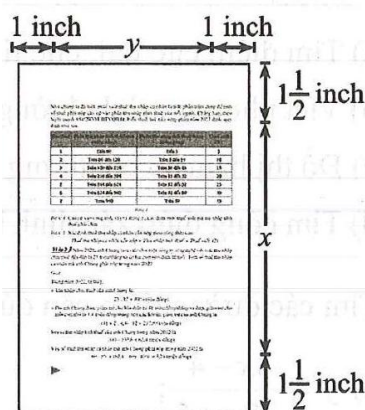
Câu 27. Từ một miếng bìa có độ dài hai cạnh lần lượt là 0,9 m và 1,5 m như Hình vẽ. Bạn Minh cắt đi phần tô màu xám và gấp lại để được một hình hộp chữ nhật. Gọi V là thể tích hình hộp chữ nhật được tạo thành, V được tính theo x bởi công thức nào? Tìm x để hình hộp tạo thành có thể tích lớn nhất.



Lời giải

$$V = x^2 \cdot (0,9 - 2x); x = 0,3 \text{ m}$$

Câu 28. Một nhà in sử dụng các trang giấy hình chữ nhật để in sách. Sau khi để lề trái, lề phải, lề trên và lề dưới theo số liệu được cho ở Hình vẽ thì diện tích phần in chữ trên trang sách là 24 inch^2 . Tính kích thước của trang sách để diện tích giấy cần sử dụng là ít nhất?



Lời giải

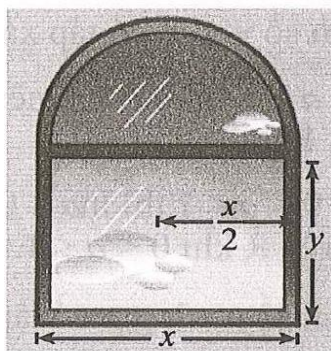
Diện tích một trang giấy là: $S = (x+3)(y+2) (\text{inch}^2)$.

Diện tích phần in chữ là: $xy = 24$. Suy ra $y = \frac{24}{x}$.

Khi đó, $S = (x+3)\left(\frac{24}{x} + 2\right) = 30 + 2x + \frac{72}{x}$.

S nhỏ nhất khi $x = 6, y = 4$. Vậy, kích thước của trang sách là 9 inch $\times$ 6 inch.

Câu 29. Một cửa sổ gồm phần dưới là một hình chữ nhật và phần vòm có hình bán nguyệt được mô tả ở Hình vẽ. Tìm x, y để diện tích của cửa sổ lớn nhất, biết chu vi của cửa sổ là 5 m.



Lời giải

Chu vi của cửa sổ là: $x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 5$. Do đó, $y = \frac{10 - (2 + \pi)x}{4}$.

Diện tích của cửa sổ là: $S = xy + \pi \frac{x^2}{8} = \frac{-(4 + \pi)x^2 + 20x}{8}$.

Diện tích của cửa sổ lớn nhất khi $x = \frac{10}{4 + \pi} \approx 1,4$ (m), $y = \frac{5}{4 + \pi} \approx 0,7$ (m).