

CHƯƠNG V: GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Bài: BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

Thời gian thực hiện: 1 tiết bài tập.

I. Mục tiêu.

1. Về kiến thức

- Nắm được định nghĩa về giới hạn dãy số, hàm số, cấp số nhân lùi vô hạn, hàm số liên tục
- Biết cách tính giới hạn dãy số, hàm số, tổng cấp số nhân lùi vô hạn
- Biết giải quyết bài toán về hàm số liên tục

2. Về năng lực

- Năng lực tư duy và lập luận toán học.
- Năng lực mô hình hoá toán học: thông qua việc làm các bài tập vận dụng.
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán.
- Năng lực tự chủ và tự học, giao tiếp và hợp tác.

3. Về phẩm chất:

- Chủ động phát hiện, chiếm lĩnh tri thức mới, biết quy lạ về quen, có tinh thần trách nhiệm hợp tác, xây dựng cao.
- Có ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá, vận dụng kiến thức.
- Tích cực thực hiện các nhiệm vụ học tập

II. Thiết bị dạy học và học liệu.

- Kiến thức về giới hạn dãy số, hàm số, cấp số nhân lùi vô hạn, hàm số liên tục
- Máy tính hoặc điện thoại có kết nối internet. Máy chiếu và các tài liệu tham khảo liên quan
- Phiếu học tập. Bảng phụ hoặc giấy A₀

III. Tiến trình dạy học:

1. Hoạt động 1 (10 phút): Hệ thống kiến thức chương V

- +**Mục tiêu:** Giúp học sinh hệ thống lại các kiến thức trọng tâm chương V.
- +**Nội dung:** GV giao nhiệm vụ cho học sinh về nhà làm và báo cáo.
- +**Sản phẩm:** Nội dung học sinh đã chuẩn bị theo phân công của giáo viên.
- +**Tổ chức thực hiện:**

Hoạt động của GV và HS	Sản phẩm dự kiến
B1: Chuyển giao nhiệm vụ: GV đã giao nhiệm vụ cho HS về nhà làm. B2: Thực hiện nhiệm vụ: HS đã chuẩn bị nội dung ở nhà. B3: Báo cáo, thảo luận: GV mời đại diện các nhóm báo cáo sản phẩm trước lớp và chọn 1 nhóm khác nhận xét, bổ sung. B4: Kết luận, nhận định, đánh giá: GV đánh giá về hoạt động, tiến độ hoàn thành, kết quả của các nhóm.	

Sản phẩm dự kiến hoạt động 1:

Nhóm 1: Giới hạn dãy số

+) Các kết quả sau thường dùng

$$\cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \forall |q| < 1.$$

$$\cdot \text{Nếu } |u_n| \leq v_n \forall n \geq 1 \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ thì } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

* giới hạn vô cực của dãy số

$$+) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty, \text{ với } k \text{ là số nguyên dương;}$$

$$+) \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty, \text{ với } q > 1.$$

+) Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn là số thực a** khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$, kí hiệu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \text{ hay } u_n \rightarrow a \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

+) Tổng quát, ta có các quy tắc tính giới hạn sau đây: Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$ thì

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = a + b \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = a - b$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \text{ (nếu } b \neq 0 \text{)}$$

$$b) \text{ Nếu } u_n \geq 0 \text{ với mọi } n \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \text{ thì } a \geq 0 \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}.$$

+) Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

$$S = \frac{u_1}{1 - q} \quad (|q| < 1)$$

+) Liên quan đến **giới hạn vô cực** của dãy số, ta có một số quy tắc sau đây:

$$\bullet \text{ Nếu } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ (hoặc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \text{) thì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

$$\bullet \text{ Nếu } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ và } v_n > 0 \text{ với mọi } n \text{ thì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty.$$

$$\bullet \text{ Nếu } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a > 0 \text{ thì } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty.$$

Nhóm 2: Giới hạn hàm số

- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ với c là hằng số.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ với $n \in \mathbb{N}$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c, \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$.

- Với k là một số nguyên dương, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0.$$

Một số giới hạn đặc biệt:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ Với k nguyên dương;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ với k là số chẵn;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ với k là số lẻ.

a) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M ;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = L.M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \text{ nếu } M \neq 0.$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ và

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói số L là **giới hạn bên phải** của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói số L là **giới hạn bên trái** của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ khi và chỉ khi}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

Chú ý các quy tắc tính giới hạn hữu hạn không còn đúng cho giới hạn vô cực.

Ta có một số quy tắc tính giới hạn của tích và thương hai hàm số khi một trong hai hàm số đó có giới hạn vô cực.

Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$.

Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$).

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$+\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
		$-\infty$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-$.

Nhóm 3: Hàm số liên tục

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 . Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên khoảng** $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng này.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

- Hàm số đa thức và các hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Các hàm số $y = \tan x, y = \cot x, y = \sqrt{x}$ và hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) liên tục trên tập xác định của chúng.

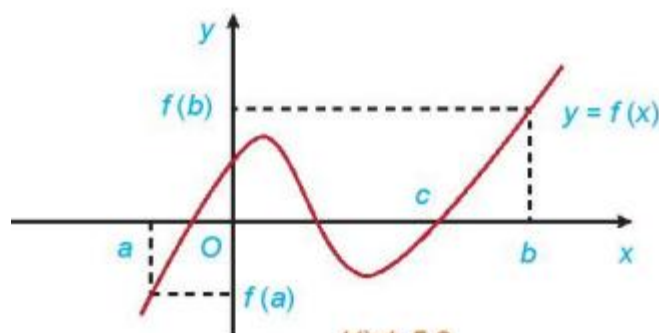
Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

a) Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 ;

b) Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Nhận xét. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Kết quả này được minh họa bằng đồ thị như Hình 5.8



Hình 5.8

2. Hoạt động 2 (10 phút): HĐ luyện tập

HD2.1 Thực hiện bài tập phần A. Trắc nghiệm

+**Mục tiêu:** Củng cố kiến thức thông qua bài tập trắc nghiệm 5.18 đến 5.24

+**Nội dung:** Bài tập 5.18 đến 5.24 – SGK

- 5.18.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n}$. Mệnh đề **đúng** là
- A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- 5.19.** Cho $u_n = \frac{2 + 2^2 + \dots + 2^n}{2^n}$. Giới hạn của dãy số (u_n) bằng
- A. 1. B. 2. C. -1. D. 0.
- 5.20.** Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_n = \frac{2}{3^n}$. Tổng của cấp số nhân này bằng
- A. 3. B. 2. C. 1. D. 6.
- 5.21.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$. Mệnh đề **đúng** là
- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$. D.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.
- 5.22.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x - x^2}{|x|}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ bằng
- A. 0. B. 1. C. $+\infty$. D. -1.
- 5.22.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x - x^2}{|x|}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ bằng
- A. 0. B. 1. C. $+\infty$. D. -1.
- 5.23.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{|x+1|}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên
- A. $(-\infty; +\infty)$. B. $(-\infty; -1]$.

C. $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

D. $[-1; +\infty)$.

5.24. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi

A. $a = 0$.

B. $a = 3$.

C. $a = -1$.

D. $a = 1$.

+**Sản phẩm:** Câu trả lời của học sinh.

+**Tổ chức thực hiện:**

Hoạt động của GV và HS	Sản phẩm dự kiến
B1: Chuyển giao nhiệm vụ: GV yêu cầu học sinh làm việc nhóm 2 học sinh cùng bàn B2: Thực hiện nhiệm vụ: + HS làm việc theo yêu cầu của GV. + GV quan sát, theo dõi và hỗ trợ (khi cần). B3: Báo cáo, thảo luận: GV gọi HS trả lời. B4: Kết luận, nhận định, đánh giá: GV đánh giá về hoạt động, tiến độ hoàn thành, kết quả của học sinh.	5.18 C 5.19 B 5.20 C 5.21 B 5.22 B 5.23 C 5.24 B

HD2.2(23 phút): Thực hiện bài tập phần B. Tự luận

+ **Mục tiêu:** củng cố kiến thức thông qua bài tập tự luận 5.26 - 5.31

+ **Nội dung:** Bài tập 5.26 - 5.31 - SGK.

5.26. Tìm giới hạn của các dãy số sau:

a) $u_n = \frac{n^2}{3n^2 + 7n - 2}$

b) $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^k + 5^k}{6^k}$

c) $w_n = \frac{\sin n}{4n}$

5.27. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số

a) $1,(01)$;

b) $5,(132)$.

5.28. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{(1-x)^2}$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

5.29. Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{|x-3|}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

5.30. Chứng minh rằng giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ không tồn tại.

5.31. Giải thích tại sao các hàm số sau đây gián đoạn tại điểm đã cho:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \text{ tại điểm } x = 0;$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{nếu } x < 1 \\ 2-x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x = 1$$

+**Sản phẩm:** Lời giải của học sinh.

+**Tổ chức thực hiện:**

Hoạt động của GV và HS	Sản phẩm dự kiến
B1: Chuyển giao nhiệm vụ: + Chia lớp thành 6 nhóm: nhóm 1 bài 5.26 và 5.27. các nhóm còn lại mỗi nhóm 1 bài + Yêu cầu học sinh làm việc theo nhóm và trình bày bài giải trong bảng phụ của nhóm. B2: Thực hiện nhiệm vụ: + HS chú ý quan sát, lắng nghe và làm việc nhóm theo yêu cầu của GV. + GV quan sát, theo dõi các nhóm và hỗ trợ (khi cần). B3: Báo cáo, thảo luận: GV chọn ngẫu nhiên 1 bạn bất kỳ trong nhóm báo cáo sản phẩm trước lớp, các nhóm khác nhận xét, bổ sung (nếu có) B4: Kết luận, nhận định, đánh giá: GV đánh giá về hoạt động, tiến độ hoàn thành, trình bày bài giải, kết quả,... của các nhóm.	

5.26. Ta có

$$a) u_n = \frac{n^2}{3n^2 + 7n - 2} = \frac{1}{3 + \frac{7}{n} - \frac{2}{n^2}}. \text{ Do đó } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}.$$

$$b) v_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^k + 5^k}{6^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^n \left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{6}}$$

$$= 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 6 \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right). \text{ Do vậy } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 8.$$

$$c) |w_n| = \frac{|\sin n|}{4n} \leq \frac{1}{4n} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty. \text{ Vậy } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.$$

5.27. Ta có

$$\text{a) } 1,(01) = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots = 1 + \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 1\frac{1}{99}.$$

$$\text{b) } 5,(132) = 5 + \frac{132}{1000} + \frac{132}{1000^2} + \dots = 5 + \frac{\frac{132}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = 5\frac{132}{999}.$$

5.28. Ta có

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x-7)(\sqrt{x+2} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 3} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{(1-x)^2} = +\infty.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{\sqrt{4x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{5.29. a) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 3) = 6.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x}} = +\infty.$$

5.30. Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$. Do đó, giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ không tồn tại.

5.31. a) Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

Vậy không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{nếu } x < 1, \\ 2-x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x) = 2$.

Do đó không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Tổng kết và hướng dẫn công việc ở nhà (2 phút).

GV tổng kết lại nội dung trọng tâm của tiết học.

GV giao cho HS về nhà làm các bài tập còn lại : 5.32 ,5.33 , 5.34