**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG**

**TRƯỜNG THPT ĐỖ ĐĂNG TUYỂN**

**TỔ TOÁN – TIN**

**GIÁO VIÊN: TRẦN NGỌC QUỐC**

**TUẦN**

**KẾ HOẠCH BÀI DẠY TOÁN 11:**

# CHƯƠNG V. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

**Bài 15: GIỚI HẠN DÃY SỐ**

**Môn học: Toán; lớp:11. Thời gian thực hiện: 2 tiết**

## *A. MỤC TIÊU*

### *1. Kiến thức*

*- Định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số, một vài giới hạn đặc biệt, giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương.*

*- Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.*

*- Giới hạn tại vô cực.*

### *2. Năng lực*

*- Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học thông qua việc giải thích giới hạn dãy số*

*- Rèn luyện năng lựcmô hình hóa toán học, năng lực giải quyết vấn đề thông qua việc vận dụng giới hạn dãy số mô tả/ giải thích các quá trình gắn với thực tiễn*

*- Năng lực tự học: Học sinh xác định đúng đắn động cơ thái độ học tập; tự đánh giá và điều chỉnh được kế hoạch học tập; tự nhận ra được sai sót và cách khắc phục sai sót.*

*- Năng lực giải quyết vấn đề: Biết tiếp nhận câu hỏi, bài tập có vấn đề hoặc đặt ra câu hỏi. Phân tích được các tình huống trong học tập.*

*- Năng lực tự quản lý: Làm chủ cảm xúc của bản thân trong quá trình học tập vào trong cuộc sống; trưởng nhóm biết quản lý nhóm mình, phân công nhiệm vụ cụ thể cho từng thành viên nhóm,*

*các thành viên tự ý thức được nhiệm vụ của mình và hoàn thành được nhiệm vụ được giao.*

*- Năng lực giao tiếp: Tiếp thu kiến thức trao đổi học hỏi bạn bè thông qua hoạt động nhóm; có thái độ tôn trọng, lắng nghe, có phản ứng tích cực trong giao tiếp.*

*- Năng lực hợp tác: Xác định nhiệm vụ của nhóm, trách nhiệm của bản thân đưa ra ý kiến đóng góp hoàn thành nhiệm vụ của chủ đề.*

*- Năng lực sử dụng ngôn ngữ: Học sinh nói và viết chính xác bằng ngôn ngữ Toán học.*

### *3. Phẩm chất*

*- Rèn luyện tính cẩn thận, chính xác. Tư duy các vấn đề toán học một cách lôgic và hệ thống.*

*- Chủ động phát hiện, chiếm lĩnh tri thức mới, biết quy lạ về quen, có tinh thần trách nhiệm hợp tác xây dựng cao.*

*- Chăm chỉ tích cực xây dựng bài, chủ động chiếm lĩnh kiến thức theo sự hướng dẫn của GV.*

*- Năng động, trung thực sáng tạo trong quá trình tiếp cận tri thức mới ,biết quy lạ về quen, có tinh thần hợp tác xây dựng cao.*

*- Hình thành tư duy logic, lập luận chặt chẽ, và linh hoạt trong quá trình suy nghĩ.*

## *B. THIẾT BỊ DẠY HỌC VÀ HỌC LIỆU*

*- Kiến thức về dãy số, dãy số bị chặn.*

*- Máy chiếu*
*- Bảng phụ*
*- Phiếu học tậpC*

***C. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC :***

***Tiết 1***

**1. HOẠT ĐỘNG 1: HOẠT ĐỘNG KHỞI ĐỘNG: GIỚI THIỆU (3 phút)**

***a) Mục tiêu**: Học sinh tiếp cận với khái niệm "giới hạn"*

***b) Nội dung:** GV hướng dẫn, tổ chức học sinh ôn tập, tìm tòi các kiến thức liên quan bài học đã biết*

*H1- Hình sau nói về một nghịch lí có tên là nghịch lí đường tròn. Nghịch lí này: Xét một đường tròn và một đa giác đều nội tiếp đường tròn ấy (Hình dưới).*

Bạn có nhận xét gì về đa giác ncạnh ấy nếu như số cạnh cứ không ngừng tăng lên, tăng mãi mãi đến vô tận?

**c) Sản phẩm:**

Câu trả lời của HS

Khi n không ngừng tăng lên thì đa giác sẽ càng ngày càng trở thành hình tròn mà nó nội tiếp. Điều này cũng không quá khó để tưởng tượng. Khi ấy ta nói giới hạn của đa giác khi n tiến tới vô tận sẽ là đường tròn.

**d) Tổ chức thực hiện:**

****) Chuyển giao nhiệm vụ :*** GV nêu câu hỏi

****) Thực hiện**:* HS suy nghĩ độc lập

****) Báo cáo, thảo luận:***

- GV gọi hs, trình bày câu trả lời của mình
- Các học sinh khác nhận xét, bổ sung để hoàn thiện câu trả lời.

****) Đánh giá, nhận xét, tổng hợp:***

- GV đánh giá thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tổng hợp kết quả.
- Dẫn dắt vào bài mới.

Nêu tình huống có vấn đề liên quan đến bài học

***Đặt vấn đề: Làm thế nào để tính giới hạn của các dãy số sau:***

$a, u_n = \frac{1}{n^3}$ $\quad b, u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\quad c, u_n = \frac{3n+1}{2n-3}$ $\quad c, u_n = n^3 + 3n$

**2. HOẠT ĐỘNG 2: HÌNH THÀNH KIẾN THỨC MỚI**

**I. Giới hạn hữu hạn của dãy số**

**a) Mục tiêu:** Phát biểu và giải thích được các định nghĩa về giới hạn hữu hạn của dãy số. Viết và đọc được các kí hiệu về giới hạn hữu hạn của dãy số, nêu được các giới hạn hữu hạn đặc biệt của dãy số, sử dụng định nghĩa chứng minh được dãy số có giới hạn hữu hạn, thái độ nghiêm túc, hợp tác. Phát triển năng lực hợp tác, ra quyết định, giao tiếp, năng lực sử dụng các thuật ngữ về giới hạn.

**b) Nội dung:**

**HĐ 1. NHẬN BIẾT DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN LÀ 0**

+ Định nghĩa:

Ta nói dãy số $(u_n)$ **có giới hạn là 0** khi $n$ dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

**Ví dụ 1.** Xét dãy số $u_n = \frac{1}{n^2}$. Giải thích vì sao dãy số này có giới hạn là 0.

**Giải**

Dãy số có giới hạn là 0, bởi vì $|u_n| = \frac{1}{n^2}$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý khi $n$ đủ lớn.

Chẳng hạn, để $|u_n| < 0,0001$ tức $\frac{1}{n^2} < 10^{-4}$ ta cần $n^2 > 10000 \Leftrightarrow n > 100$. Như vậy, các số hạng của dãy kể từ số hạng thứ 101 đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn $0,0001$.

**Chú ý.** Từ định nghĩa dãy số có giới hạn 0, ta có các kết quả sau:

. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \forall k \in \mathbb{N}^*$.

. $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0 \forall |q| < 1$.

. Nếu $|u_n| \le v_n \forall n \ge 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**Luyện tập 1.** Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} = 0$.

**HĐ 2. Nhận biết dãy số có giới hạn hữu hạn**

+ Định nghĩa:

Ta nói dãy số $(u_n)$ **có giới hạn là số thực a** khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0$, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

**Ví dụ 2:** Xét dãy số $(u_n)$ với $u_n = \frac{2n+1}{n}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

**Giải :**

Ta có $u_n - 2 = \frac{2n+1}{n} - 2 = \frac{(2n+1)-2n}{n} = \frac{1}{n} \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Do vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

**Nhận xét:** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0$.

**Luyện tập 2.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = \frac{3.2^n - 1}{2^n}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

**Vận dụng 1.** Một quả bóng cao su được thả từ độ cao $5m$ xuống một mặt sàn. Sau mỗi lần chạm sàn, quả bóng nảy lên độ cao bằng $\frac{2}{3}$ độ cao trước đó. Giả sử rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt sàn và quá trình này tiếp diễn vô hạn lần. Giả sử $u_n$ là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng sau lần nảy lên thứ $n$. Chứng minh rằng dãy số $(u_n)$ có giới hạn là 0.

**c) Sản phẩm**: Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

**HĐTP1.**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | Trình chiếu nội dung câu hỏi Luyện tập 1, chia lớp thành 4 nhóm<br>HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ, phân công các thành viên trong<br>nhóm |
| ***Thực hiện*** | GV: Cho học sinh thảo luận 5 phút<br>HS: Đọc yêu cầu, trình bày nội dung câu trả lời trên bảng phụ |
| ***Báo cáo thảo luận*** | sơ đồ 1 Nhóm 1 đại diện báo cáo sản phẩm, các nhóm còn lại kiểm tra chéo theo -2-3-4. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các nhóm ; giới thiệu nội dung định nghĩa 1 ; yêu cầu học sinh đọc nội dung định nghĩa ;hướng dẫn viết và đọc kí hiệu<br>Yêu cầu thực hiện câu hỏi 2 và VD 1. |

**HĐTP2**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | Trình chiếu nội dung câu hỏi 2 yêu cầu học sinh hoạt động cặp đôi<br>HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ |
| ***Thực hiện*** | GV: Cho học sinh thảo luận 5 phút<br>HS: Hoàn thành yêu cầu ra giấy nháp hoặc vở ghi |
| ***Báo cáo thảo luận*** | Đại diện hai học sinh lên bảng trình bày kết quả |

| | |
|---|---|
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các cặp đôi ; giới<br>thiệu nội dung định nghĩa 2 ; yêu cầu học sinh đọc nội dung định nghĩa 2;hướng dẫn viết và đọc kí hiệu<br>Yêu cầu thực hiện câu hỏi 3 |

**HĐTP3**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | Nêu câu hỏi vận dụng 1, yêu cầu hoạt động cá nhân<br>HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ |
| ***Thực hiện*** | GV: Cho học sinh thực hiện 1 phút<br>HS: Hoàn thành yêu cầu và ghi lại kết quả, nêu dự đoán |
| ***Báo cáo thảo luận*** | Đại diện hai học sinh đứng tại chỗ nêu kết quả, cả lớp thống nhất về kết<br>quả và nhận xét. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | Đánh giá kết quả đạt được, hướng dẫn học sinh đọc và ghi nhớ những giới<br>hạn đặc biệt |

## II. ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

**Hoạt động 3.** Hình thành quy tắc tính giới hạn.

**a) Mục tiêu:** Phát biểu và giải thích được định lý về giới hạn hữu hạn của dãy số. Áp dụng định lý tính được giới hạn hữu hạn của dãy số, thái độ nghiêm túc, hợp tác. Phát triển năng lực hợp tác, ra quyết định, giao tiếp, năng lực sử dụng các thuật ngữ về giới hạn.

**b) Nội dung:**

CH 1: Dãy số có giới hạn đặc biệt, dùng MTCT tính số hạng thứ 10;100,1000 và dự đoán giới hạn của các dãy số.

Cho hai dãy số $(u_n)$ và $(v_n)$ với $u_n = 2+\frac{1}{n}; v_n = 3-\frac{2}{n}$.

Tính và so sánh: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n+\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

Tổng quát, ta có các quy tắc tính giới hạn sau đây:

a) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=b$ thì

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=a+b$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=a-b$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n.v_n)=a.b$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}$ (nếu $b\neq 0$)

b) Nếu $u_n\geq 0$ với mọi $n$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ thì $a\geq 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$.

**Ví dụ 3. ( Bài tập 1a)** Tìm có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+n+1}{2n^2-1}$.

**Giải.**

Áp dụng các quy tắc tính giới hạn, ta được:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n+1}{2n^2-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{2}.$$

**Nhận xét:** Để tính giới hạn của dãy số dạng phân thức, ta chia cả tử thức và mẫu thức cho lũy thừa cao nhất của $n$ , rồi áp dụng các quy tắc tính giới hạn.

**Luyện tập 3( Bài tập 1b).** Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1}$.

**c) Sản phẩm**: Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện**

**HĐTP1.**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | Trình chiếu nội dung câu hỏi 1, chia lớp thành 4 nhóm<br>HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ, phân công các thành viên trong nhóm |
| ***Thực hiện*** | GV: Cho học sinh thảo luận 5 phút<br>HS: Đọc yêu cầu, trình bày nội dung câu trả lời trên bảng phụ |
| ***Báo cáo thảo luận*** | sơ đồ 1 Nhóm 1 đại diện báo cáo sản phẩm, các nhóm còn lại kiểm tra chéo theo -2-3-4. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các nhóm ; giới thiệu<br>nội dung định nghĩa 1 ; yêu cầu học sinh đọc nội dung định nghĩa ;hướng<br>dẫn viết và đọc kí hiệu<br>Yêu cầu thực hiện câu hỏi 2 và 3. |

**HĐTP2**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | Trình chiếu nội dung câu hỏi 2,3 yêu cầu học sinh hoạt động cặp đôi<br>HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ |
| ***Thực hiện*** | GV: Cho học sinh thảo luận 5 phút<br>HS: Hoàn thành yêu cầu ra giấy nháp hoặc vở ghi |
| ***Báo cáo thảo luận*** | Đại diện hai học sinh lên bảng trình bày kết quả |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các cặp đôi ; giới thiệu nội dung định lý ; yêu cầu học sinh đọc nội dung định<br>lý; hướng dẫn viết và đọc kí hiệu<br>Yêu cầu thực hiện câu hỏi luyện tập 3 |

**HĐTP3**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | Nêu câu hỏi luyện tập 3, yêu cầu hoạt động cá nhân<br>HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ |
| ***Thực hiện*** | GV: Cho học sinh thực hiện 1 phút<br>HS: Hoàn thành yêu cầu và ghi lại kết quả, nêu dự đoán |
| ***Báo cáo thảo luận*** | Đại diện hai học sinh đứng tại chỗ nêu kết quả, cả lớp thống nhất về kết<br>quả và nhận xét. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | Đánh giá kết quả đạt được, hướng dẫn học sinh đọc và ghi nhớ những giới<br>hạn đặc biệt |

**Tiết 2:**

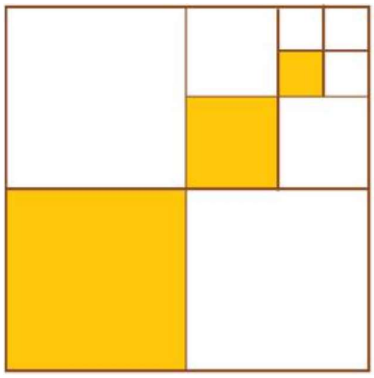
## III . TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

**Hoạt động 4.** Làm quen với việc tính tổng vô hạn.

a) Mục tiêu: Nhận ra được cấp số nhân lùi vô hạn, nhớ được công thức tính tổng các số hạng của
cấp số nhân lùi vô hạn, áp dụng tính được tổng cụ thể.

b) Nội dung:

Cho hình vuông cạnh 1 (đơn vị độ dài). Chia hình vuông đó thành bốn hình vuông nhỏ bằng nhau, sau đó tô màu hình vuông nhỏ góc dưới bên trái (H.5.2). Lặp lại các thao tác này với hình vuông nhỏ góc trên bên phải. Giả sử quá trình trên tiếp diễn vô hạn lần. Gọi $u_1,u_2,...,u_n,...$ lần lượt là độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu.



a) Tính tổng $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

b) Tìm $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Cấp số nhân vô hạn $(u_n)$ có công bội $q$ với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Cho cấp số nhân lùi vô hạn $(u_n)$ với công bội $q$. Khi đó $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.

Vì $|q| < 1$ nên $q^n \to 0$ khi $n \to +\infty$. Do đó, ta có:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left[ \frac{u_1}{1-q} - \left( \frac{u_1}{1-q} \right) q^n \right] = \frac{u_1}{1-q}.$$

Giới hạn này được gọi là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $(u_n)$, và kí hiệu là $S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$

Như vậy $S = \dfrac{u_1}{1-q} \ (|q| < 1)$.

**Ví dụ 4.** Tính tổng $S = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + ... + \left( -\dfrac{1}{2} \right)^{n-1} + ...$

**Giải.**

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và $q = -\dfrac{1}{2}$.

Do đó $S = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-\left( -\frac{1}{2} \right)} = \dfrac{2}{3}$.

**Ví dụ 5.** Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,222...$ dưới dạng phân số.

**Giải.**

Ta có $2,222... = 2 + 0,2 + 0,02 + 0,002 + ... = 2 + 2.10^{-1} + 2.10^{-2} + 2.10^{-3} + ...$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 2, q = 10^{-1}$ $2,222... = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{2}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{20}{9}$.

c) Sản phẩm : Câu trả lời của HS

**d) Tổ chức thực hiện**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | GV : Nêu nội dung bài toán, yêu cầu thực hiện cá nhân<br>HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ |
| ***Thực hiện*** | GV: Cho học sinh thảo luận 2 phút<br>HS: Hoàn thành yêu cầu ra nháp hoặc vở |

| | |
|---|---|
| ***Báo cáo thảo luận*** | Đứng tại chỗ trả lời câu hỏi |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các nhóm ; giới thiệu khái niệm cấp số nhân lùi và hướng dẫn tính tổng.<br>Yêu cầu học sinh hoàn thiện bài toán vào vở. |

## IV. Giới hạn vô cực

### Hoạt động 5

**a) Mục tiêu:** Phát biểu được định nghĩa giới hạn vô cực của dãy số, nhớ được một vài giới hạn đặc biệt và quy tắc tính giới hạn vô cực. Rèn kỹ năng tính toán, tư duy logic, thái độ hợp tác, năng lực sử dụng thuật ngữ về giới hạn, năng lực giao tiếp.

**b) Nội dung**

**+ Định nghĩa:**

- Dãy số $(u_n)$ được gọi là có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $u_n$ có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

- Dãy số $(u_n)$ được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

**+ Theo định nghĩa trên, ta có:**

+) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$, với $k$ là số nguyên dương;

+) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, với $q > 1$.

Liên quan đến giới hạn vô cực của dãy số, ta có một số quy tắc sau đây:

- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi $n$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

**Ví dụ.** Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2 - 2n\right)$.

**Lời giải**

Ta có $n^2 - 2n = n^2\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$. Hơn nữa $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) = 1$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2 - 2n\right) = +\infty$.

**Luyện tập 5.** Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n - \sqrt{n}\right)$.

**c, Sản phẩm:** Câu trả lời của HS

**d) Tổ chức thực hiện**

**HĐTP1.**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | GV : Nêu nội dung bài toán, yêu cầu thực hiện cá nhân<br>HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ |
| ***Thực hiện*** | GV: Cho học sinh thảo luận 2 phút<br>HS: Thảo luận cặp đôi, hoàn thành yêu cầu ra nháp hoặc vở |

| | |
|---|---|
| ***Báo cáo thảo luận*** | Đứng tại chỗ trả lời câu hỏi |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các nhóm ; giới thiệu<br>định nghĩa về giới hạn vô cực. Cho học sinh đọc Định nghĩa SGK, giải thích thuật ngữ, cách ghi kí hiệu.<br>. Để tính giới hạn vô cực ta thừa nhận một số giới hạn đặc biệt và |

| | |
|---|---|
| | nội dung<br>định lý (SGK) |

**HĐTP2.**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | GV : Nêu nội dung ví dụ, chia lớp thành 4 nhóm<br>HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ |
| ***Thực hiện*** | GV: Cho học sinh thảo luận 5 phút, gợi ý, biến đổi công thức của dãy số về<br>dạng thuận lợi cho việc dùng các giới hạn đặc biệt và nội dung định lý (Chú ý định lý chỉ áp dụng được khi một dãy có giới hạn hữu hạn, dãy còn lại có giới hạn vô cực)<br>HS: Nhóm 1,2 thực hiện nội dung a1,b1 ; nhóm 3,4 thực hiện nội dung a2.b2, trình bày câu trả lời ra bảng phụ |
| ***Báo cáo thảo luận*** | Đại diện nhóm 2,4 lên bảng trình bày kết quả, nhóm 1,3 kiểm tra chéo kết<br>quả của nhóm 2,4 |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các nhóm , chú ý<br>những biến đổi thường dùng để đưa các dãy số về dạng có thể áp dụng được<br>định lý<br>Yêu cầu học sinh hoàn thiện bài toán vào vở. |

V. Hoạt động 6: LUYỆN TẬP( Giải BT SGK -109)

a) Mục tiêu: HS biết áp dụng các kiến thức về giới hạn dãy số và kiến thức về dãy số làm được các bài tập liên quan.

b) Nội dung:

**Phiếu học tập**

**5.2.** Cho hai dãy số không âm $(u_n)$ và $(v_n)$ với $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$. Tìm các giới hạn sau:

**a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^2}{v_n - u_n}$; **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n + 2v_n}$.

**5.3.** Tìm giới hạn của các dãy số cho bởi:

**a)** $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n-1}$ **b)** $v_n = \sqrt{2n^2+1} - n$.

**5.4.** Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số:

**a)** $1,(12) = 1,121212\ldots$; **b)** $3,(102) = 3,102102102\ldots$

**5.5.** Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc $150\text{mg}$. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cun trong cơ thể vẫn còn $5\%$. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

**c) Sản phẩm**: học sinh thể hiện trên bảng nhóm kết quả bài làm của mình

**d) Tổ chức thực hiện**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | GV: Chia lớp thành 4 nhóm. Phát phiếu học tập<br>HS: Nhận nhiệm vụ, |
| ***Thực hiện*** | GV: điều hành, quan sát, hỗ trợ<br>HS: 4 nhóm tự phân công nhóm trưởng, hợp tác thảo luận thực hiện nhiệm<br>vụ. Ghi kết quả vào bảng nhóm. |
| ***Báo cáo thảo luận*** | Đại diện nhóm trình bày kết quả thảo luận<br>Các nhóm khác theo dõi, nhận xét, đưa ra ý kiến phản biện để làm rõ hơn<br>các vấn đề |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của các nhóm học sinh, ghi |

| | |
|---|---|
| | nhận và tuyên dương nhóm học sinh có câu trả lời tốt nhất.<br>Hướng dẫn HS chuẩn bị cho nhiệm vụ tiếp theo |

**Hướng dẫn giải**

**Bài 5.2** Cho hai dãy số không âm $(u_n)$ và $(v_n)$ với $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$. Tìm các giới hạn sau:

**a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^2}{v_n - u_n}$; **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n + 2v_n}$.

**Giải:**

$$a,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^2}{v_n - u_n} = \frac{\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)^2}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n} = \frac{2^2}{3-2} = 4;$$

$$b,\ \lim_{n\to+\infty}(u_n - 2v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + 2\lim_{n\to+\infty} v_n = 2 + 2.3 = 8 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n - 2v_n} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

**Bài 5.3**

**5.3.** Tìm giới hạn của các dãy số cho bởi:

**a)** $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n-1}$ **b)** $v_n = \sqrt{2n^2+1} - n$.

**Giải:**

$$a,\ \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2}} = \ldots = +\infty$$

$$b,\ \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} (\sqrt{2n^2+1} - n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{2n^2+1} - n\right)\left(\sqrt{2n^2+1} + n\right)}{\left(\sqrt{2n^2+1} + n\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n^2+1\right)}{\left(\sqrt{2n^2+1} + n\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{\dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n^4}} + \dfrac{1}{n}} = +\infty$$

**Bài 5.4** : Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số:

a) 1,(12) = 1,121212...;

b) 3,(102) = 3,102102102...

**Lời giải:**

a) Ta có: 1,(12) = 1,121212... = 1 + 0,12 + 0,0012 + 0,000012 + ...

= 1 + 12 . $10^{-2}$ + 12 . $10^{-4}$ + 12 . $10^{-6}$ + ...

= 1 + 12 . ($10^{-2}$ + $10^{-4}$ + $10^{-6}$ + ...)

Do $10^{-2}$ + $10^{-4}$ + $10^{-6}$ + ... là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 10^{-2}$ và $q = 10^{-2}$ nên

$10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + ... = 10−21−10−2=19910−21−10−2=199.$

Vậy 1,(12) = 1+12.199=3333+433=37331+12.199=3333+433=3733.

b) Ta có: 3,(102) = 3,102102102... = 3 + 0,102 + 0,000102 + 0,000000102 + ...

$= 3 + 102 . 10^{-3} + 102 . 10^{-6} + 102 . 10^{-9} + ...$

$= 3 + 102 . (10^{-3} + 10^{-6} + 10^{-9} + ...)$

Do $10^{-3} + 10^{-6} + 10^{-9} + ...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 10^{-3}$ và $q = 10^{-3}$ nên

$10^{-3} + 10^{-6} + 10^{-9} + ... = 10−31−10−3=199910−31−10−3=1999.$

Vậy 3,(102) = 3 + 102.1999=3+34333=1033333102.1999=3+34333=1033333.

**Bài 5.5** : Một bệnh nhân hằng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

**Lời giải:**

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày đầu tiên là 150 mg.

Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%.

Do đó, lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ hai là

$150 + 150 . 5\% = 150(1 + 0,05).$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ ba là

$150 + 150(1 + 0,05) . 5\% = 150 + 150(0,05 + 0,05^2) = 150(1 + 0,05 + 0,05^2)$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ tư là

$150 + 150(1 + 0,05 + 0,05^2) . 5\% = 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3)$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ năm là

$150 + 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3) . 5\% = 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4)$

= 157,8946875 (mg).

Cứ tiếp tục như vậy, ta ước tính lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài là

$S = 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + ...)$

Lại có $1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + ...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 0,05$.

Do đó, $1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + ... = u/(11−q)=1/(1−0,05)=20/19$

Suy ra $S = 150·(20/19)=400/361$.

## TÊN BÀI DẠY: CHƯƠNG V. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

## Bài 16: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

**Môn học: Toán; lớp:11. Thời gian thực hiện: 2 tiết**

## I. MỤC TIÊU

### 1. Kiến thức

- Nhận biết khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm và tại vô cực.
- Nhận biết khái niệm giới hạn một bên.
- Nhận biết khái niệm vô cực.
- Nắm được một vài giới hạn đặc biệt và các quy tắc về giới hạn vô cực.
- Học sinh biết cách tính giới hạn hàm số tại một điểm, tính giới hạn hàm số tại vô cực
- Học sinh phân biệt được các dạng vô định của giới hạn hàm số.

### 2. Năng lực

- Năng lực tư duy và lập luận toán học: Thông qua việc tính giới hạn của hàm số qua giới hạn của dãy số.
- Năng lực mô hình hóa toán học: Thông qua việc viết công thức hàm sómoo tả mối liên quan giữa các đại lượng hình học.
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học: Thông qua các bài toán liên quan đến giới hạn của hàm số
- Năng lực giao tiếp Toán học: Trong các định lý, ví dụ, bài tập.
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện để học Toán: Sử dụng máy tính cầm tay.

### 3. Về phẩm chất:

- Chăm chỉ, hoàn thành các nhiệm vụ được giao.
- Trách nhiệm, cố gắng chiếm lĩnh kiến thức mới, cố gắng làm đúng các bài tập.
- Có thế giới quan khoa học

## II. Thiết bị dạy học và học liệu

- Kế hoạch bài dạy, SGK, phiếu học tập, phấn, thước kẻ, máy chiếu, phần mềm GSP…

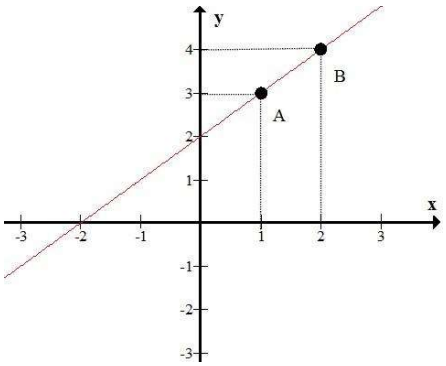
## III. Tiến trình dạy học

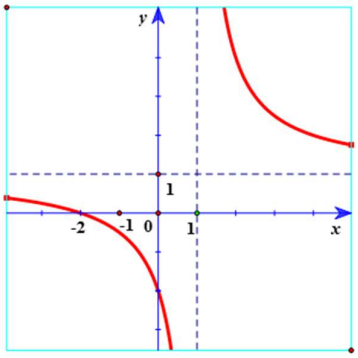
**Tiết 1.**

### 1. HOẠT ĐỘNG KHỞI ĐỘNG: GIỚI THIỆU (3 phút)

**a) Mục tiêu**: Tạo tình huống để học sinh tiếp cận với khái niệm "giới hạn hàm số tại một điểm".

**b) Nội dung:**




H1- Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, em có nhận xét gì về giá trị hàm số khi $x$ dần đến $2$

H2- Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, em có nhận xét gì về giá trị hàm số khi $x$ dần đến $1$

**c) Sản phẩm:**

Câu trả lời của HS

L1- giá trị của hàm số dần về $4$

L2- giá trị của hàm số dần về $-\infty$ khi $x<1$ và dần về $+\infty$ khi $x>1$.

**d) Tổ chức thực hiện:**

***) Chuyển giao nhiệm vụ :*** GV nêu câu hỏi; trình chiếu đồ thị hai hàm số.

***) Thực hiện:*** HS suy nghĩ độc lập

***) Báo cáo, thảo luận:***

- GV gọi lần lượt 2 hs, đứng tại chỗ trình bày câu trả lời của mình
- Các học sinh khác nhận xét, bổ sung để hoàn thiện câu trả lời.

***) Đánh giá, nhận xét, tổng hợp:***

- GV đánh giá thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tổng hợp kết quả.
- Dẫn dắt vào bài mới.

ĐVĐ. Giới hạn hàm số có phải là giá trị của hàm số không? Chúng ta cùng nghiên cứu bài học ngày hôm nay.

## 2. HOẠT ĐỘNG HÌNH THÀNH KIẾN THỨC

### 2.1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

**a ) Mục tiêu:** Nhận biết khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm.

**b) Nội dung**: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x-2}$.

**a)** Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.

**b)** Cho dãy số $x_n=\dfrac{2n+1}{n}$. Rút gọn $f(x_n)$ và tính giới hạn của dãy $(u_n)$ với $u_n=f(x_n)$.

**c)** Với dãy số $(x_n)$ bất kì sao cho $x_n\neq 2$ và $x_n\to 2$, tính $f(x_n)$ và tìm $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$.

**c) Sản phẩm**: Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )<br>* Trên cơ sở câu trả lời của học sinh, giáo viên chuẩn hóa kiến thức, từ đó giới thiệu về khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại 1 điểm. |
| ***Thực hiện*** | Nhóm – tại lớp. |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Cá nhân báo cáo, các nhóm theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức :<br>*Giả sử $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm $x_0$ và hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$, có thể trừ điểm $x_0$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số $L$ khi $x$ dần tới $x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n\in(a;b), x_n\neq x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to x_0$.* |

**VÍ DỤ:**

**a)Mục tiêu**: Tính giới hạn hữu hạn của hàm số cụ thể bằng cách sử dụng định nghĩa.

**b) Nội dung: Ví dụ 1.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$. Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

**c) Sản phẩm**: Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )<br>Gv yêu cầu hs tìm TXĐ, tính $f(x_n)$ và giới hạn $\lim\limits_{x_n\to 1} f(x_n)$ |
| ***Thực hiện*** | Học sinh lên bảng và thực hiện $\lim\limits_{x_n\to 1} f(x_n)=\lim\limits_{x_n\to 1}\dfrac{1}{x_n+1}=\dfrac{1}{2}$ |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |

| | |
|---|---|
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức :<br>Lấy dãy số $(x_n)$ bất kì sao cho $x_n \neq 1$ và $x_n \to 1$. Ta có $f(x_n) = \dfrac{x_n - 1}{x_n^2 - 1} = \dfrac{1}{x_n + 1}$.<br>Do đó $\lim\limits_{x_n \to 1} f(x_n) = \lim\limits_{x_n \to 1} \dfrac{1}{x_n + 1} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$. |

**2.2. QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM:**

a) Mục tiêu: Hình thành các quy tắc tính giới hạn.

b) Nội dung:

a)

- $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ với $c$ là hằng số.
- $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$ với $n \in \mathbb{N}$.

li

$x \to$

li

$x \to x_0$

$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x).g(x)] = L.M$

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, nếu $M \neq 0$.

b) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

c) Sản phẩm: Câu trả lời của học sinh.

d) Tổ chức thực hiện

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * HS nhắc lại các quy tắc giới hạn của dãy số<br>GV ghi bảng hoặc chiếu lại nội dung quy tắc. |
| ***Thực hiện*** | Học sinh làm việc nhóm |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức phần nội dung. |

Ví dụ:

a) Mục tiêu:

+ VD2: Thực hành các quy tắc giới hạn của hàm số.

+ VD3: Xét TH không thể áp dụng ngay quy tắc tính giới hạn của thương 2 hàm số khi giới hạn của mẫu số bằng 0.

+ Luyện tập 1: Củng cố kĩ năng tính giới hạn của hàm số tại một điểm.

b) Nội dung:

**Ví dụ 2.** Cho $f(x)=x-1$ và $g(x)=x^3$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}[3f(x)-g(x)]$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[f(x)]^2}{g(x)}$

**Lời giải**

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}1=1-1=0$. Mặt khác, ta thấy $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}x^3=1$.

a) Ta có

$$\lim_{x\to 1}[3f(x)-g(x)]=\lim_{x\to 1}[3f(x)]-\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}3.\lim_{x\to 1}f(x)-\lim_{x\to 1}g(x)=3.0-1=-1.$$

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[f(x)]^2}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]^2}{\lim\limits_{x\to 1}g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}f(x).\lim\limits_{x\to 1}f(x)}{\lim\limits_{x\to 1}g(x)}=\dfrac{0}{1}=0.$

**Ví dụ 3.** Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$.

**Lời giải**

Do mẫu thức có giới hạn là 0 khi $x\to 0$ nên ta không thể áp dụng ngay quy tắc tính giới hạn của thương hai hàm số.

Chú ý rằng $\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\dfrac{(\sqrt{x+9})^2-3^2}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\dfrac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}[\sqrt{x+9}+3]}=\dfrac{1}{6}$.

**Luyện tập 1.** Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

a) Sản phẩm: Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm ) |
| ***Thực hiện*** | Học sinh lên bảng và thực hiện |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức :<br>**VD2**<br>Ta có $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}1=1-1=0$.<br>Mặt khác, ta thấy $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}x^3=1$.<br>a) Ta có<br>$\lim\limits_{x\to 1}[3f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to 1}[3f(x)]-\lim\limits_{x\to 1}g(x)$<br>$=\lim\limits_{x\to 1}3.\lim\limits_{x\to 1}f(x)-\lim\limits_{x\to 1}g(x)=3.0-1=-1.$ |

| | |
|---|---|
| | b) Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[f(x)]^2}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]^2}{\lim\limits_{x\to 1}g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}f(x).\lim\limits_{x\to 1}f(x)}{\lim\limits_{x\to 1}g(x)}=\dfrac{0}{1}=0.$<br>VD3. Do mẫu thức có giới hạn là 0 khi $x\to 0$ nên ta không thể áp dụng ngay quy tắc tính giới hạn của thương hai hàm số.<br>Chú ý rằng $\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\dfrac{(\sqrt{x+9})^2-3^2}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\dfrac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}.$<br>Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}[\sqrt{x+9}+3]}=\dfrac{1}{6}.$ |

## 2.3. GIỚI HẠN MỘT BÊN

**a) Mục tiêu**: Giúp HS hình thành khái niệm giới hạn một bên của hàm số.

**b) Nội dung:**

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$.

a) Cho $x_n=\dfrac{n}{n+1}$ và $x_n'=\dfrac{n+1}{n}$. Tính $y_n=f(x_n)$ và $y_n'=f(x_n')$.

b) Tìm giới hạn của các dãy số $(y_n)$ và $(y_n')$.

c) Cho các dãy số $(x_n)$ và $(x_n')$ bất kì sao cho $x_n<1<x_n'$ và $x_n\to 1, x_n'\to 1$, tính $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n')$.

**c) Sản phẩm:** Câu trả lời của HS

**d) Tổ chức thực hiện:**

***) Chuyển giao nhiệm vụ :*** GV nêu câu hỏi.

***) Thực hiện:*** HS suy nghĩ độc lập

***) Báo cáo, thảo luận:***

- GV gọi lần lượt 2 hs, đứng tại chỗ trình bày câu trả lời của mình
- Các học sinh khác nhận xét, bổ sung để hoàn thiện câu trả lời.

***) Đánh giá, nhận xét, tổng hợp:***

- GV đánh giá thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tổng hợp kết quả.

**Khái niệm giới hạn một bên:**

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$. Ta nói số $L$ là giới hạn bên phải của $f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì thoả mãn $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$. Ta nói số $L$ là giới hạn bên trái của $f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì thoả mãn $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=L$.

Chú ý:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=L.$

**Ví dụ 4:** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{nếu } 0<x<1\\ x+1 & \text{nếu } 1\le x<2\end{cases}$

Tính $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

**Lời giải**

Với dãy số $(x_n)$ bất kì sao cho $0<x_n<1$ và $x_n\to 1$, ta có $f(x_n)=x_n^2$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=1$.

Tương tự, với dãy số $(x_n)$ bất kì mà $1<x_n<2, x_n\to 1$, ta có $f(x_n)=x_n+1$, cho nên $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=2$

**Luyện tập 2:**

**a) Mục tiêu**: Tính được giới hạn một bên.

**b) Nội dung:** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-x & \text{nếu } x<0\\ \sqrt{x} & \text{nếu } x\ge 0\end{cases}$

Tính $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

**c) Sản phẩm**: Câu trả lời của học sinh.

**d) Tổ chức thực hiện:**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )<br>Gv yêu cầu hs tính $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. |
| ***Thực hiện*** | Học sinh thực hiện theo nhóm. |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Gọi 1 HS báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức : |

**Luyện tập 3: Hướng dẫn HS làm bài tập 5.7; 5.8; 5.11 sách giáo khoa.**

**5.7.** Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ và $g(x)=x+1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**a)** $f(x)=g(x)$;

**b)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

**HD: a)** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1=g(x)$

**b)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$

Vậy b đúng; a đúng khi x khác 1.

**5.8.** Tính các giới hạn sau:

**a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^2-4}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$.

Đây là giới hạn dạng $\dfrac{0}{0}$

Phần a cần khai triển hằng đẳng thức rồi giản ước tử và mẫu để khử dạng $\frac{0}{0}$

Phần b nhân cả tử và mẫu với lượng liên hợp của tử rồi khử dạng $\frac{0}{0}$

HS có thể dùng MTCT để tính.nếu

KQ: a) 4 b) 1/6

**5.11.** Cho hàm số $g(x)=\frac{x^2-5x+6}{|x-2|}$.

Tìm $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$.

HD: Xét 2 TH $g(x)=\frac{x^2-5x+6}{|x-2|}=\begin{cases}\frac{x^2-5x+6}{x-2}, x>2\\ \frac{x^2-5x+6}{2-x}, x<2\end{cases}$

Từ đó tính các giới hạn và đc kq là -1 và 1

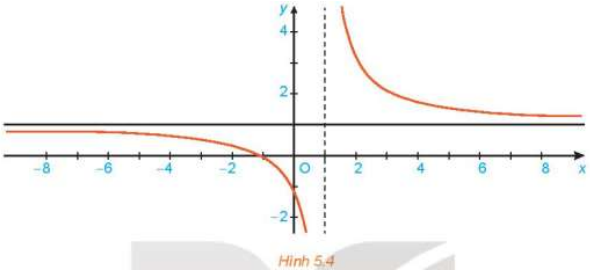
**Tiết 2**

**1. HOẠT ĐỘNG HÌNH THÀNH KIẾN THỨC**

**HĐ1.1: GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC**

**a ) Mục tiêu:** Nhận biết khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực.

**b) Nội dung**: Cho hàm số $f(x)=1+\frac{2}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ



Hình 5.4

Giả sử $(x_n)$ là dãy số sao cho $x_n>1, x_n\to+\infty$. Tính $f(x_n)$ và tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

c) Sản phẩm: Câu trả lời của học sinh

d) Tổ chức thực hiện:

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )<br>* Trên cơ sở câu trả lời của học sinh, giáo viên chuẩn hóa kiến thức, từ đó giới thiệu về khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số. |
| ***Thực hiện*** | Theo nhóm – tại lớp. |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |

| | |
|---|---|
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức :<br>Ta có khái niệm sau đây<br>- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số $L$ khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n>$ a và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to L$. kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.<br>- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số $L$ khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n<b$ và $x_n\to-\infty$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to-\infty$. |

**Ví dụ 1.** Cho $f(x)=2+\dfrac{4}{x-1}$. Sử dụng định nghĩa, tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

**Lời giải**

Lấy dãy $(x_n)$ bất kì sao cho $x_n>1$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)=2+\dfrac{4}{x_n-1}$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. Tương tự, ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$.

- Các quy tắc tính giới hạn hữu hạn tại một điểm cũng đúng cho giới hạn hữu hạn tại vô cực.
- Với c là hằng số, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}c=c$, $\lim\limits_{x\to-\infty}c=c$.

**Ví dụ 2.** Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

**Giải**

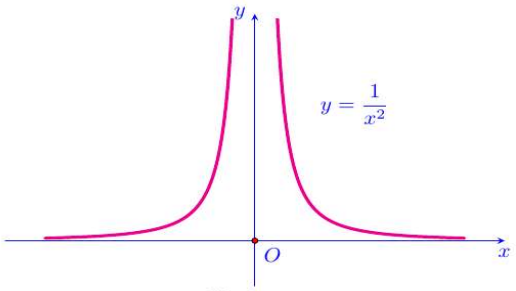
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}\right)=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=-\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=-\sqrt{1+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}}=-1$.

**HĐ1.2. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM**

**HĐ 1.2.1. Giới hạn vô cực**

**a ) Mục tiêu:** Nhận biết khái niệm giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm.

**b) Nội dung**: Nhận biết khái niệm giới hạn vô cực. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ có đồ thị như Hình 5.6. Cho $x_n=\dfrac{1}{n}$, chứng tỏ rằng $f(x_n)\to+\infty$.



*Hình 5.6*

Giả sử khoảng $(a;b)$ chứa $x_0$ và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n\in(a;b)\setminus\{x_0\}$, $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to+\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$.

Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $-\infty$ khi $x\to x_0$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$, nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\left[-f(x)\right]=+\infty$.

**Ví dụ 3.** Tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{|x-1|}$.

**Giải**

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$. Lấy dãy số $(x_n)$ bất kì sao cho $x_n\neq1, x_n\to1$. Khi đó, $|x_n-1|\to0$.

Do đó $f(x_n)=\dfrac{1}{|x_n-1|}\to+\infty$. Vậy $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{|x-1|}=+\infty$.

**c) Sản phẩm**: Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )<br>* Trên cơ sở câu trả lời của học sinh, giáo viên chuẩn hóa kiến thức, từ đó giới thiệu về khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số. |
| ***Thực hiện*** | Theo nhóm – tại lớp. |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức : |

**Một số giới hạn đặc biệt:**

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=+\infty$ Với $k$ nguyên dương;

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=+\infty$ với $k$ là số chẵn;

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=-\infty$ với $k$ là số lẻ.

**HĐ 1.2.2. Một số quy tắc tính giới hạn vô cực**

Chú ý các quy tắc tính giới hạn hữu hạn không còn đúng cho giới hạn vô cực.

Ta có một số quy tắc tính giới hạn của tích và thương hai hàm số khi một trong hai hàm số đó có giới hạn vô cực.

Quy tắc *tìm giới hạn của tích* $f(x).g(x)$.

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ (hoặc $-\infty$). Khi đó $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau:

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ |
|---|---|---|
| $L>0$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $L<0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| | $-\infty$ | $+\infty$ |

Quy tắc *tìm giới hạn của thương* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | Dấu của $g(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ |
|---|---|---|---|
| $L$ | $+\infty$ | Tùy ý | 0 |
| $L>0$ | 0 | + | $+\infty$ |
| | | − | $-\infty$ |
| $L<0$ | 0 | + | $-\infty$ |
| | | $-\infty$ | $+\infty$ |

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x\to x_0^+, x\to x_0^-$.

**Ví dụ 4.** Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x^2}$.

**Giải**

Ta sử dụng quy tắc tìm giới hạn của thương. Rõ ràng, giới hạn của tử số $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$.

Ngoài ra, mẫu số nhận giá trị dương với mọi $x\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$. Do vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x^2}=+\infty$.

**Ví dụ 5.** Tính $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x(1-x)}$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x(1-x)}$.

**Giải**

Viết $\dfrac{1}{x(1-x)}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1-x}$, ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1>0$. Hơn nữa $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1-x}=-\infty$ do $1-x<0$ khi $x>1$.

Áp dụng quy tắc tìm giới hạn của tích, ta được $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x(1-x)}=-\infty$.

Lí luận tương tự, ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x(1-x)}=+\infty$.

**2. HOẠT ĐỘNG LUYỆN TẬP:**

**2.1. Luyện tập 1.**

**a ) Mục tiêu:** Củng cố kĩ năng tính giới hạn của hàm số tại vô cực.

**b) Nội dung**: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}$.

**c) Sản phẩm**: Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )<br>* GV hướng dẫn hs cách tính. |

| | |
|---|---|
| ***Thực hiện*** | Theo nhóm – tại lớp. |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức : |

**2.2. Luyện tập 2**

**a) Mục tiêu**: Tính được giới hạn một bên.

**b) Nội dung:** Tính $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x-1}{x-2}$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-1}{x-2}$.

**c) Sản phẩm**: Câu trả lời của học sinh.

**d) Tổ chức thực hiện:**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )<br>Gv yêu cầu hs tính $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x-1}{x-2}$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-1}{x-2}$. |
| ***Thực hiện*** | Học sinh thực hiện theo nhóm. |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Gọi 1 HS báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức : |

**2.3 Luyện tập 3**

**Hướng dẫn HS làm bài tập 5.10; 5.12 sách giáo khoa.**

**5.10.** Tính các giới hạn một bên:

**a)** $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x-1}$;

**b)** $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x^2-x+1}{4-x}$

**HD:** *Ta sử dụng quy tắc tìm giới hạn của thương*

Kq: a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x-1}=-\infty$ b) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x^2-x+1}{4-x}=+\infty$

**5.12.** Tính các giới hạn sau:

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}}$

**b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)$.

**HD: a)** Làm tương tự như luyện tập 1. KQ: -2

**b)** Nhân chia với lượng liên hợp, sau đó chia cả tử và mẫu cho x rồi áp dụng giới hạn đặc biệt. KQ: 1

**3. HOẠT ĐỘNG VẬN DỤNG TÌM TÒI MỞ RỘNG**

**Mục tiêu:** *Rèn luyện cho học sinh kĩ năng tham gia hoạt động nhóm, tìm hiểu tư liệu trên mạng, kĩ năng tự học và tự nghiên cứu ở nhà.*

| *Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh* | *Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động* |
|---|---|

| | |
|---|---|
| Cho học sinh nghiện cứu các bài tập sau:<br>***Bài toán 1:** Theo dự đoán tỉ lệ tuổi thọ con người của một nước đang phát triển, sau $x$ năm kể từ bây giờ là: $T(x) = \frac{138x+236}{2x+5}$ năm . Hỏi tuổi thọ của con người sẽ đạt được tới mức Giới hạn là bao nhiêu? | 69 tuổi. |
| * Tính các giới hạn sau:<br>a/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}$ | a/ $\frac{0}{0}$ , đáp số -1 ( nhân lượng liên hợp) |
| b/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\text{ax}}-1}{x}$ | b/ đặt $t=\sqrt[n]{1+\text{ax}}, x\to 0 \Leftrightarrow t\to 1$<br>$\text{ax}=t^n-1=(t-1)\left(t^{n-1}+t^{n-2}+...+t+1\right)$<br>$\Rightarrow \frac{t-1}{x}=\frac{a}{t^{n-1}+t^{n-2}+...+t+1}$<br>$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\text{ax}}-1}{x}=\lim\limits_{t\to 1}\frac{t-1}{x}=\frac{a}{n}$ |
| c/ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$ | c/<br>$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1}$<br>$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^3}{(x^2-1)(\sqrt{5-x^3}+2)}=...=-\frac{3}{8}$<br>$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1}=....=\frac{1}{12}$<br>$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=-\frac{11}{24}$ |
| thuật toán: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{0}{0}$<br>phân tích $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)+c}{g(x)}+\frac{f_2(x)-c}{g(x)}$<br>gọi $\alpha_i\ (i=1;2;3...)$ là nghiệm của $g(x)=0$<br>khi đó c là nghiệm của hệ $\begin{cases}f_1(\alpha_i)+c=0\\f_2(\alpha_i)-c=0\end{cases}\Rightarrow c?$<br>bài tập về nhà:<br>d/ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$<br>e/ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$<br>g/ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$ | |

# Bài 17: HÀM SỐ LIÊN TỤC

**Môn học: Toán; lớp:11. Thời gian thực hiện: 2 tiết**

## I. MỤC TIÊU

### 1. Kiến thức

-Biết khái niệm hàm số liên tục tại một điểm.

-Biết định nghĩa và tính chất của hàm số liên tục trên một khoảng, đoạn …. Và các định lý trong SGK

### 2. Năng lực

- Năng lực tư duy và lập luận Toán học: Trong xét tính liên tục của hàm số
- Năng lực mô hình hóa Toán học: Trong các bài toán thực tế.
- Năng lực giải quyết vấn đề Toán học: Trong vận dụng các tính chất vào việc xét tính liên tục của các hàm số và tìm số nghiệm của phương trình dạng đơn giản.
- Năng lực giao tiếp Toán học: Trong các định lý, ví dụ, bài tập.
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện để học Toán: Sử dụng máy tính cầm tay.

### 3. Về phẩm chất:

- Chăm chỉ, hoàn thành các nhiệm vụ được giao.
- Trách nhiệm, cố gắng chiếm lĩnh kiến thức mới, cố gắng làm đúng các bài tập.
- Có thế giới quan khoa học

## II. Thiết bị dạy học và học liệu

- Kế hoạch bài dạy, SGK, phiếu học tập, phấn, thước kẻ, máy chiếu, phần mềm GSP…

**III. Tiến trình dạy học**

**Tiết 1.**

**1. Hoạt động 1: HOẠT ĐỘNG KHỞI ĐỘNG: GIỚI THIỆU (3 phút)**

**- Mục tiêu:**Giúp cho học sinh tiếp cận với các kiến thức cơ bản về hàm số liên tục thông qua tính giới hạn của hàm số.Giáo viên trình chiếu hai hình ảnh cho học sinh quan sát.

**-Nội dung**:

**Hình 1**



**Hình 2**



**Hình 1** Cho ta thấy cây cầu thông suốt, các phương tiện giao thông qua lại liên tục.

**Hình 2** Cho ta thấy cây cầu bị gãy, giao thông bị gián đoạn hay không liên tục.

**c) Sản phẩm**: Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * Giáo viên trình chiếu hình ảnh |
| ***Thực hiện*** | - HS quan sát.<br>- HS tìm câu trả lời.<br>- Mong đợi: Kích thích sự tò mò của HS<br>+ Nêu được một số thông tin về cây cầu, các phương tiện giao thông qua lại ở 2 hình trên. |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức:<br>Trong cuộc sống thì cụm từ "liên tục" được sử dụng rất nhiều, vậy trong toán học khái niệm liên tục được hiểu như thế nào, ta đi vào bài học: " Hàm số liên tục". |

**2. Hoạt động 2: HOẠT ĐỘNG: HÌNH THÀNH KIẾN THỨC**

**HĐ2.1. <u>Hàm số liên tục tại một điểm</u>**

**a ) Mục tiêu:** Học sinh nắm được khái niệm hàm số liên tục tại điểm, áp dụng xét tính liên tục vủa hàm số.

**b) Nội dung**:

Nhận biết tính liên tục của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{neu } x\neq 1\\ 2 & \text{neu } x=1.\end{cases}$

**c) Sản phẩm**: Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )<br>* Trên cơ sở câu trả lời của học sinh, giáo viên chuẩn hóa kiến thức, từ đó giới thiệu về định nghĩa tính liên tục tại 1 điểm. |
| ***Thực hiện*** | Cá nhân – tại lớp. ( Học sinh lên bảng và thực hiện các bước tính giới hạn và tính $f(x_0)$ để so sánh) |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Cá nhân báo cáo, các nhóm theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức :<br>Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm $x_0$. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm $x_0$ nếu |

**HĐ2.2 Vận dụng**

**a)Mục tiêu**: Giúp cho học sinh củng cố được cách xét tính liên tục của hàm số tại 1 điểm.

**b) Nội dung**:

**Ví dụ 1.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại điểm $x_0=2$.

**Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của hàm dấu $s(x)=\begin{cases}1 & \text{neu } x>0\\ 0 & \text{neu } x=0\\ -1 & \text{neu } x<0\end{cases}$ tại điểm $x_0=0$.

**c) Sản phẩm**: Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )<br>Gv yêu cầu hs tìm TXĐ, tính giới hạn, tính giá trị hàm số tại x= -2 |
| ***Thực hiện*** | Học sinh lên bảng và thực hiện các bước tính giới hạn và tính $f(x_0)$ để so sánh |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức :<br>VD1. Rõ ràng hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, do đó $x_0=2$ thuộc tập xác định của hàm số.<br>Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-1}=3=f(2)$. Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=2$.<br>VD2. Ta thấy $\lim\limits_{x\to 0^+} s(x)=1, \lim\limits_{x\to 0^-} s(x)=-1$. Do đó không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} s(x)$.<br>Vậy hàm số này gián đoạn tại 0 . |

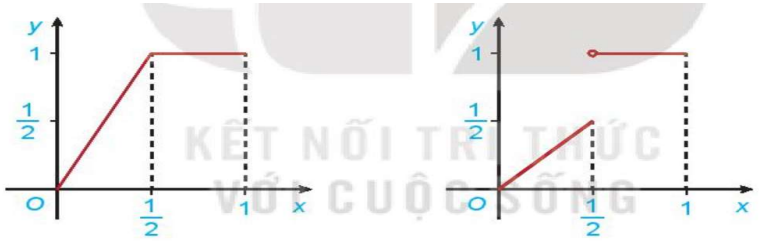
**HĐ2.3. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘTKHOẢNG**

**a ) Mục tiêu:** Học sinh nắm được khái niệm hàm số liên tục trên khoảng và một số định lí cơ bản về hàm số liên tục, áp dụng xét tính liên tục của hàm số.

**b) Nội dung**:

Cho hai hàm số $f(x)=\begin{cases}2x \text{ neu } 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 1 \text{ neu } \dfrac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$ và $g(x)=\begin{cases}x \text{ neu } 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 1 \text{ neu } \dfrac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$

với đồ thị tương ứng như **Hình 5.7**




Hình 5.7

Xét tính liên tục của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ tại điểm $x=\dfrac{1}{2}$ và nhận xét về sự khác nhau giữa hai đồ thị.

**c) Sản phẩm:** Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )<br>* Trên cơ sở câu trả lời của học sinh, giáo viên chuẩn hóa kiến thức, từ đó giới thiệu về định nghĩa tính liên tục trên một khoảng. |
| ***Thực hiện*** | Theo nhóm – tại lớp. |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức :<br>Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng này.<br>Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn [a ; b] nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và . $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ .<br>Các khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng như $(a;b],[a;+\infty),\ldots$ được định nghĩa theo cách tương tự. Có thể thấy đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền trên khoảng đó.<br>Về tính liên tục của các hàm số sơ cấp cơ bản đã biết, ta có |
| | • Hàm số đa thức và các hàm số $y=\sin x, y=\cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ .<br>• Các hàm số $y=\tan x, y=\cot x, y=\sqrt{x}$ và hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) liên tục trên tập xác định của chúng. |
| | |

**HĐ2.4. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN**

**a ) Mục tiêu:** Học sinh nắm được tính chất các hàm số liên tục và một số định lí cơ bản về hàm số liên tục,

**b) Nội dung**: Cho hai hàm số $f(x)=x^2$ và $g(x)=-x+1$.

a) Xét tính liên tục của hai hàm số trên tại $x=1$.

b) Tính $L=\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)+g(x)\right]$ và so sánh $L$ với $f(1)+g(1)$.

c) Sản phẩm: Câu trả lời của học sinh

d) Tổ chức thực hiện:

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )<br>* Trên cơ sở câu trả lời của học sinh, giáo viên chuẩn hóa kiến thức, từ đó giới thiệu về tính chất liên tục của hàm số. |
| ***Thực hiện*** | Theo nhóm – tại lớp. |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức :<br>Ta có khẳng định sau đây về tổng, hiệu, tích và thương của hai hàm số liên tục. |
| | Giả sử hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục tại điểm $x_0$. Khi đó:<br>a) Các hàm số $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$ và $y=f(x)g(x)$ liên tục tại $x_0$;<br>b) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại $x_0$ nếu $g(x_0)\neq 0$.. |

**HĐ 2.5. Luyện tập**:

**a ) Mục tiêu:** Học sinh nắm được kỹ hơn tính chất các hàm số liên tục và một số định lí cơ bản về hàm số liên tục,

**b) Nội dung**: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. Tìm các khoảng trên đó hàm số $f(x)$ liên tục.

**c) Sản phẩm**: Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )<br>Gv yêu cầu hs tìm TXĐ |
| ***Thực hiện*** | Theo nhóm – tại lớp. Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức : Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. |

**Tiết 2:**

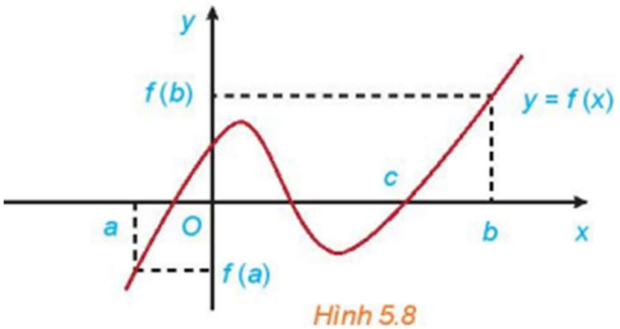
**3. Hoạt động 3. HOẠT ĐỘNG LUYỆN TẬP**

**HĐ3.1 Tìm số nghiệm pt dựa vào tính liên tục của hàm số**

**a) Mục tiêu:** Giúp học sinh vận dụng kiến thức để giải quyết những vấn đề thực tế trong cuộc sống, những bài toán thực tế ứng dụng phương trình,…

Thực hiện được cơ bản các dạng bài tập trong Sách giáo khoa

**b)Nội dung**: Dựa vào hình vẽ sau: Hãy tính f(a); f(b) và tính tích f(a).f(b) so sánh với 0



Hình 5.8

**c) Sản phẩm**: Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )<br>Gv yêu cầu hs tính f(a); f(b) và tính tích f(a).f(b) so sánh với 0 |
| ***Thực hiện*** | Theo nhóm – tại lớp. |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức : Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$. |

## HĐ 3.2 Bài tập SGK

**a) Mục tiêu:** Giúp học sinh vận dụng kiến thức đã học giải quyết những bài toán xét tính liên tục của hàm số, vấn đề thực tế trong cuộc sống, những bài toán thực tế ứng dụng phương trình,…

Thực hiện được cơ bản các dạng bài tập trong Sách giáo khoa

**b)Nội dung**: **Bài 2-SGK.** a/ Xét tính liên tục của hàm số y = g(x) tại $x_0=2$, biết: $g(x)=\begin{cases}\frac{x^3-8}{x-2} & , \quad x\neq 2\\ 5 & , \ x=2\end{cases}$

b/ Cần thay số 5 bởi số nào để hàm số liên tục tại $x_0=2$

**c) Sản phẩm**: Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

| | |
|---|---|
| ***Chuyển giao*** | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm ) |
| ***Thực hiện*** | Theo nhóm – tại lớp (*học sinh lên bảng trình bày lời giải bài toán*) |
| ***Báo cáo thảo luận*** | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận. |
| ***Đánh giá, nhận xét, tổng hợp*** | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức : Với $x\neq 2$ thì $g(x)=\frac{x^3-8}{x-2}=x^2+2x+4$<br>$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)$ |

| | |
|---|---|
| | $=12\neq g(2)=5$<br>Vậy hàm số không liên tục tại $x_0=2$ . Vì $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=12\neq g(2)$<br>Cần thay số 5 bởi số 12<br>+ Giáo viên nhận xét lời giải, sửa chữa và củng cố kiến thức. |

# BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

Thời gian thực hiện: 1 tiết bài tập.

**I. Mục tiêu**.

***1. Về kiến thức***

- Nắm được định nghĩa về giới hạn dãy số,hàm số,cấp số nhân lùi vô hạn, hàm số liên tục
- Biết cách tính giới hạn dãy số,hàm số,tổng cấp số nhân lùi vô hạn
- Biết giải quyết bài toán về hàm số liên tục

***2. Về năng lực***

- Năng lực tư duy và lập luận toán học.
- Năng lực mô hình hoá toán học: thông qua việc làm các bài tập vận dụng.
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán.
- Năng lực tự chủ và tự học, giao tiếp và hợp tác.

***3. Về phẩm chất**:*

- Chủ động phát hiện, chiếm lĩnh tri thức mới, biết quy lạ về quen, có tinh thần trách nhiệm hợp tác, xây dựng cao.
- Có ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá, vận dụng kiến thức.
- Tích cực thực hiện các nhiệm vụ học tập

**II. Thiết bị dạy học và học liệu.**

- Kiến thức về giới hạn dãy số,hàm số,cấp số nhân lùi vô hạn, hàm số liên tục
- Máy tính hoặc điện thoại có kết nối internet. Máy chiếu và các tài liệu tham khảo liên quan
- Phiếu học tập. Bảng phụ hoặc giấy $A_0$

**III. Tiến trình dạy học:**

**1. Hoạt động 1 (10 phút): Hệ thống kiến thức chương V**

+***Mục tiêu***: Giúp học sinh hệ thống lại các kiến thức trọng tâm chương V.

+***Nội dung***: GV giao nhiệm vụ cho học sinh về nhà làm và báo cáo.

+***Sản phẩm***: Nội dung học sinh đã chuẩn bị theo phân công của giáo viên.

+***Tổ chứcthực hiện***:

| Hoạt động của GV và HS | Sản phẩm dự kiến |
|---|---|
| **B1: Chuyển giao nhiệm vụ:**<br>GV đã giao nhiệm vụ cho HS về nhà làm.<br>**B2: Thực hiện nhiệm vụ:**<br>HS đã chuẩn bị nội dung ở nhà.<br>**B3: Báo cáo, thảo luận:**<br>GV mời đại diện các nhóm báo cáo sản phẩm trước lớp và chọn 1 nhóm khác nhận xét, bổ sung.<br>**B4: Kết luận, nhận định, đánh giá:**<br>GV đánh giá về hoạt động, tiến độ hoàn thành, kết quả của các nhóm. | |

**Sản phẩm dự kiến hoạt động 1:**

**Nhóm 1: Giới hạn dãy số**

+) Các kết quả sau thường dùng

. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{n^k}=0\,\forall k\in\mathbb{N}^*$.

. $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0\,\forall|q|<1$.

. Nếu $|u_n|\le v_n\forall n\ge 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

*** giới hạn vô cực của dãy số**

+) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^k=+\infty$, với $k$ là số nguyên dương;

+) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, với $q > 1$.

+) Ta nói dãy số $(u_n)$ **có giới hạn là số thực a** khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

+ ) Tổng quát, ta có các quy tắc tính giới hạn sau đây: Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ thì

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = a + b$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = a - b$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n.v_n) = a.b$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$)

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi $n$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

+ ) Cấp số nhân vô hạn $(u_n)$ có công bội $q$ với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

$$S = \frac{u_1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

+ ) Liên quan đến **giới hạn vô cực** của dãy số, ta có một số quy tắc sau đây:

- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$) thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi $n$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

**Nhóm 2: Giới hạn hàm số**

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói số $L$ là giới hạn bên phải của $f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì thoả mãn $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói số $L$ là giới hạn bên trái của $f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì thoả mãn $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

i vô cực.

**+) Một số quy tắc tính giới hạn vô cực**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ khi vụ chỉ khi

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L.$

a) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$ thì

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=L+M$

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=L-M$;

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x).g(x)]=L.M$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$, nếu $M\neq 0$.

b) Nếu $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in(a;b)\setminus\{x_0\}$ và

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$

thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

- $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ với $c$ là hằng số.

- $\lim\limits_{x\to x_0} x^n=x_0^n$ với $n\in\mathbb{N}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} c=c, \lim\limits_{x\to-\infty} c=c$.

- Với $k$ là một số nguyên dương, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^k}=0, \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$.

**Một số giới hạn đặc biệt:**

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ Với $k$ nguyên dương;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$ với $k$ là số chẵn;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$ với $k$ là số lẻ.

Chú ý các quy tắc tính giới hạn hữu hạn không còn đúng cho giới hạn vô cực.
Ta có một số quy tắc tính giới hạn của tích và thương hai hàm số khi một trong hai hàm số đó có giới hạn vô cực.

Quy tắc *tìm giới hạn của tích* $f(x).g(x)$.

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ (hoặc $-\infty$).

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ |
|---|---|---|
| $L>0$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $L<0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| | $-\infty$ | $+\infty$ |

Quy tắc *tìm giới hạn của thương* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | Dấu của $g(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ |
|---|---|---|---|
| $L$ | $+\infty$ | Tùy ý | 0 |
| $L>0$ | 0 | + | $+\infty$ |
| | | − | $-\infty$ |
| $L<0$ | 0 | + | $-\infty$ |
| | | $-\infty$ | $+\infty$ |

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x\to x_0^+, x\to x_0^-$.

**Nhóm 3: Hàm số liên tục**

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm $x_0$. Hàm số $f(x)$

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng này.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn [a ; b] nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và . $\lim f(x)=f(a)$ $\lim f(x)=f(b)$

• Hàm số đa thức và các hàm số $y=\sin x, y=\cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

• Các hàm số $y=\tan x, y=\cot x, y=\sqrt{x}$ và hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) liên tục trên tập xác định của chúng.

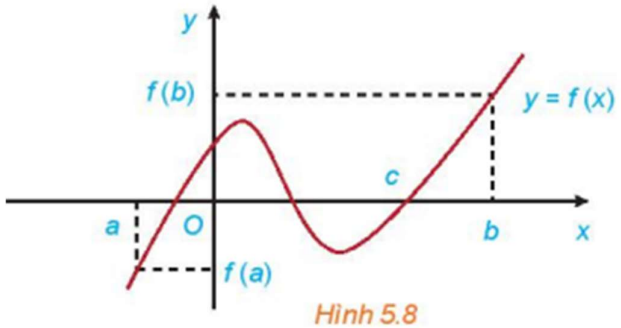
Giả sử hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục tại điểm $x_0$. Khi đó:

a) Các hàm số $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$ và $y=f(x)g(x)$ liên tục tại $x_0$;

b) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại $x_0$ nếu $g(x_0)\neq 0$..

**Nhận xét.** Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Kết quả này được minh hoạ bằng đồ thị như Hình 5.8



Hình 5.8

**2. Hoạt động 2 (10 phút): HĐ luyện tập**

**HĐ2.1 Thực hiện bài tập phần A. Trắc nghiệm**

+***Mục tiêu***: Củng cố kiến thức thông qua bài tập trắc nghiệm 5.18 đến 5.24

+***Nội dung***: Bài tập 5.18 đến 5.24 – SGK

**5.18.** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}$. Mệnh đề **đúng** là

**A.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$. **B.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$. **C.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$. **D.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

**5.19.** Cho $u_n=\dfrac{2+2^2+\ldots+2^n}{2^n}$. Giới hạn của dãy số $(u_n)$ bằng

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $-1$. **D.** $0$.

**5.20.** Cho cấp số nhân lùi vô hạn $(u_n)$ với $u_n=\dfrac{2}{3^n}$. Tổng của cấp số nhân này bằng

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $6$.

**5.21.** Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}$. Mệnh đề **đúng** là

**A.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. **C.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$.

**5.22.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-x^2}{|x|}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ bằng

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $+\infty$. **D.** $-1$.

**5.22.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-x^2}{|x|}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ bằng

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $+\infty$. **D.** $-1$.

**5.23.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{|x+1|}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên

**A.** $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1]$.

**C.** $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. **D.** $[-1;+\infty)$.

**5.24.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ a & \text{nếu } x=1\end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ khi

**A.** $a=0$. **B.** $a=3$. **C.** $a=-1$. **D.** $a=1$.

+***Sản phẩm***: Câu trả lời của học sinh.

+***Tổ chức thực hiện***:

| Hoạt động của GV và HS | Sản phẩm dự kiến |
|---|---|
| **B1: Chuyển giao nhiệm vụ:**<br>GV yêu cầu học sinh làm việc nhóm 2 học sinh cùng bàn<br>**B2: Thực hiện nhiệm vụ:**<br>+ HS làm việc theo yêu cầu của GV.<br>+ GV quan sát, theo dõi và hỗ trợ (khi cần).<br>**B3: Báo cáo, thảo luận:**<br>GV gọi HS trả lời.<br>**B4: Kết luận, nhận định, đánh giá:**<br>GV đánh giá về hoạt động, tiến độ hoàn thành, kết quả của học sinh. | **5.18 C**<br>**5.19 B**<br>**5.20 C**<br>**5.21 B**<br>**5.22 B**<br>**5.23 C**<br>**5.24 B** |

**HĐ2.2( 23 phút): Thực hiện bài tập phần B. Tự luận**

+ ***Mục tiêu***: Củng cố kiến thức thông qua bài tập tự luận 5.26 - 5.31

+ ***Nội dung***: Bài tập 5.26 - 5.31 - SGK.

**5.26.** Tìm giới hạn của các dãy số sau:

a) $u_n=\dfrac{n^2}{3n^2+7n-2}$ b) $v_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{3^k+5^k}{6^k}$ c) $w_n=\dfrac{\sin n}{4n}$

**5.27.** Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số

a) $1,(01)$; b) $5,(132)$.

**5.28.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-x}{(1-x)^2}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

**5.29.** Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{|x-3|}$; b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.

**5.30.** Chứng minh rằng giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ không tồn tại.

**5.31.** Giải thích tại sao các hàm số sau đây gián đoạn tại điểm đã cho:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x\neq 0\\ 1 & \text{nếu } x=0\end{cases}$ tại điểm $x=0$;

b) $f(x)=\begin{cases}1+x & \text{neáu } x<1\\ 2-x & \text{neáu } x\ge 1\end{cases}$ tại điểm $x=1$

+***Sản phẩm***: Lời giải của học sinh.

+***Tổ chức thực hiện***:

| Hoạt động của GV và HS | Sản phẩm dự kiến |
|---|---|
| **B1: Chuyển giao nhiệm vụ:**<br>+ Chia lớp thành 6 nhóm: nhóm 1 bài 5.26 và 5.27. các nhóm còn lại mỗi nhóm 1 bài<br>+ Yêu cầu học sinh làm việc theo nhóm và trình bày bài giải trong bảng phụ của nhóm.<br>**B2: Thực hiện nhiệm vụ:**<br>+ HS chú ý quan sát, lắng nghe và làm việc nhóm theo yêu cầu của GV.<br>+ GV quan sát, theo dõi các nhóm và hỗ trợ (khi cần).<br>**B3: Báo cáo, thảo luận:**<br>GV chọn ngẫu nhiên 1 bạn bất kỳ trong nhóm báo cáo sản phẩm trước lớp, các nhóm khác nhận xét, bổ sung (nếu có)<br>**B4: Kết luận, nhận định, đánh giá:**<br>GV đánh giá về hoạt động, tiến độ hoàn thành, trình bày bài giải, kết quả,... của các nhóm. | |

**5.26.** Ta có

a) $u_n=\dfrac{n^2}{3n^2+7n-2}=\dfrac{1}{3+\dfrac{7}{n}-\dfrac{2}{n^2}}$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{1}{3}$.

b) $v_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{3^k+5^k}{6^k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k+\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{5}{6}\right)^k=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{5}{6}}$

$=2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+6\left(1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n+1}\right)$. Do vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=8$.

c) $|w_n|=\dfrac{|\sin n|}{4n}\le\dfrac{1}{4n}\to 0$ khi $n\to+\infty$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$.

**5.27.** Ta có

a) $1,(01)=1+\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{100^2}+\ldots=1+\dfrac{\dfrac{1}{100}}{1-\dfrac{1}{100}}=1\dfrac{1}{99}$.

b) $5,(132)=5+\dfrac{132}{1000}+\dfrac{132}{1000^2}+\ldots=5+\dfrac{\dfrac{132}{1000}}{1-\dfrac{1}{1000}}=5\dfrac{132}{999}$.

**5.28.** Ta có

a) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{(x-7)\left(\sqrt{x+2}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+3}=\dfrac{1}{6}.$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-x}{(1-x)^2}=+\infty.$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{4x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}=-\dfrac{1}{2}.$

**5.29.** a) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{|x-3|}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}(x+3)=6.$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}=+\infty.$

**5.30.** Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$ và $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$. Do đó, giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ không tồn tại.

**5.31.** a) Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} \text{ nếu } x\neq 0,\\ 1 \text{ nếu } x=0\end{cases}$ tại điểm $x=0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$.

Vậy không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $g(x)=\begin{cases}1+x \text{ nếu } x<1,\\ 2-x \text{ nếu } x\geq 1\end{cases}$ tại điểm $x=1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(1+x)=2$.

Do đó không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$.

**Tổng kết và hướng dẫn công việc ở nhà (2 phút).**

GV tổng kết lại nội dung trọng tâm của tiết học.

GV giao cho HS về nhà làm các bài tập còn lại : 5.32 ,5.33 , 5.34