

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG

TRƯỜNG THPT ĐỖ ĐĂNG TUYỀN

TỔ TOÁN – TIN

GIÁO VIÊN: TRẦN NGỌC QUỐC



KẾ HOẠCH BÀI DẠY CHUYÊN ĐỀ TOÁN ...

Chuyên đề 2.

ỨNG DỤNG TOÁN HỌC ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU

BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 2

Thời gian thực hiện: 2 tiết

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kỹ năng

- Ôn tập kỹ năng vận dụng các kiến thức về hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính trong thực tiễn.
- Ôn tập kỹ năng vận dụng các kiến thức về đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu xuất hiện trong thực tiễn và trong kinh tế.

2. Về năng lực

- Rèn luyện các năng lực toán học, nói riêng là năng lực mô hình hoá toán học và năng lực tư duy và lập luận toán học.
- Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học thông qua việc giải quyết một số bài toán thực tiễn.
- Góp phần phát triển các năng lực chung như năng lực giao tiếp và hợp tác (qua việc thực hiện hoạt động nhóm, ...), năng lực thuyết trình, báo cáo (khi trình bày kết quả của nhóm), năng lực tự chủ và tự học (khi đọc phần Tìm tòi – Khám phá, làm bài tập ở nhà), ...

3. Về phẩm chất

Góp phần giúp HS rèn luyện và phát triển các phẩm chất tốt đẹp (yêu nước, nhân ái, chăm chỉ, trung thực, trách nhiệm):

- + Tích cực phát biểu, xây dựng bài và tham gia các hoạt động nhóm;
- + Có ý thức tích cực tìm tòi, sáng tạo trong học tập; phát huy điểm mạnh, khắc phục các điểm yếu của bản thân.

II. THIẾT BỊ DẠY HỌC VÀ HỌC LIỆU

– *Giáo viên:*

+ Giáo án, bảng phụ, máy chiếu (nếu có), phiếu học tập, ...

– *Học sinh:*

+ SGK, vở ghi, dụng cụ học tập, máy tính cầm tay.

+ Ôn lại các kiến thức trong Chuyên đề 2.

III. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC

Bài học này dạy trong 02 tiết:

+ Tiết 1. Luyện tập Chuyên đề 2.

+ Tiết 2. Luyện tập Chuyên đề 2 (tiếp theo).

Tiết 1. LUYỆN TẬP CHUYÊN ĐỀ 2

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
HOẠT ĐỘNG KHỞI ĐỘNG Mục tiêu: HS củng cố lại được các kiến thức cơ bản trong bài vận dụng hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính. Nội dung: HS thực hiện phiếu học tập số 1. Sản phẩm: Câu trả lời của HS. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động nhóm dưới sự hướng dẫn của GV.		
GV tổ chức cho HS làm phiếu học tập số 1 như trong Phụ lục (7 phút) – HS làm theo nhóm đôi vào phiếu học tập, sau 5 phút GV gọi đại diện một số nhóm trình bày câu trả lời, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết. <i>Nếu nhà trường có điều kiện thuận lợi như có máy tính, máy chiếu và Internet trong lớp học, GV có thể thiết kế một số hình thức ôn tập khác như phiếu học tập trên Kahoot, hoặc các trò chơi như Ai là triệu phú, Ô số bí mật,...</i>	– HS thực hiện phiếu học tập số 1.	+ Mục đích của phần này là để HS nhớ lại được các kiến thức cơ bản Chuyên đề 2: Các kiến thức về hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính trong thực tiễn. + Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học.
HOẠT ĐỘNG LUYỆN TẬP Mục tiêu: Củng cố các kiến thức về hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính trong thực tiễn. Nội dung: Thực hiện phần ví dụ và giải một số bài tập tự luận trong SGK. Sản phẩm: Lời giải các bài tập của HS. Tổ chức thực hiện: Gọi một số HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi lời giải và nhận xét (các bài tập do GV lựa chọn). Sau đó GV nhận xét bài làm, tổng kết phương pháp giải, lưu ý sai lầm thường mắc, ...		
Bài 2.11 SGK (12 phút) – GV tổ chức cho HS làm Bài 2.11 SGK. + GV cho HS hoạt động cá nhân trong 9 phút, sau đó gọi hai HS lên bảng trình bày bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.	– HS thực hiện Bài 2.11 và ghi bài.	+ Mục đích của phần này là cung cấp một tình huống để HS rèn luyện kỹ năng ứng dụng các kiến thức về hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính trong thực tiễn. + Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học.
Bài 2.12 SGK (12 phút) – GV tổ chức cho HS làm Bài 2.12 SGK.		+ Mục đích của phần này là cung cấp một tình huống để HS rèn luyện kỹ năng ứng dụng các kiến thức về hệ bất phương trình bậc nhất

+ GV cho HS hoạt động cá nhân trong 8 phút, sau đó GV gọi hai HS trả lời từng câu hỏi, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.	– HS thực hiện Bài 2.12 và ghi bài.	hai ẩn để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính trong thực tiễn. + Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học.
Bài 2.13 SGK (12 phút) – GV tổ chức cho HS làm Bài 2.13 SGK. + GV cho HS hoạt động cá nhân trong 8 phút, sau đó gọi HS lên bảng làm bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.	– HS thực hiện Bài 2.13 và ghi bài.	+ Mục đích của phần này là cung cấp một tình huống để HS rèn luyện kỹ năng ứng dụng các kiến thức về hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính trong thực tiễn. + Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học.
+ Tùy tình hình lớp học, GV có thể lựa chọn thêm một số bài tập còn lại trong SGK, SBT hoặc bài tập nâng cao để giao cho những HS đã hoàn thành bài tập trên (Dạy học phân hoá trong tiết chữa bài tập).		
TỔNG KẾT VÀ HƯỚNG DẪN CÔNG VIỆC Ở NHÀ GV tổng kết lại nội dung bài học và dặn dò công việc ở nhà cho HS (2 phút) – GV tổng kết lại các kiến thức trọng tâm của bài học: Vận dụng hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính. – Giao cho HS làm một số bài tập trong SGK.		

Tiết 2. LUYỆN TẬP CHUYÊN ĐỀ 2 (tiếp theo)

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
HOẠT ĐỘNG KHỞI ĐỘNG Mục tiêu: HS củng cố lại được các kiến thức cơ bản trong bài vận dụng được các kiến thức về đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu xuất hiện trong thực tiễn và trong kinh tế. Nội dung: HS thực hiện phiếu học tập số 2. Sản phẩm: Câu trả lời của HS. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động nhóm dưới sự hướng dẫn của GV.		
GV tổ chức cho HS làm phiếu học tập số 1 như trong Phụ lục (7 phút) – HS làm theo nhóm đôi vào phiếu học tập, sau 5 phút GV gọi đại diện một số nhóm trình bày câu trả lời, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết. <i>Nếu nhà trường có điều kiện thuận lợi như có máy tính, máy chiếu và Internet trong lớp học, GV có thể thiết kế một số hình thức ôn tập khác như phiếu học tập trên Kahoot, hoặc các trò chơi như Ai là triệu phú, Ô số bí mật,...</i>	– HS thực hiện phiếu học tập số 2.	+ Mục đích của phần này là để HS nhớ và hệ thống lại được các kiến thức cơ bản Chuyên đề 2: Các kiến thức về đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu xuất hiện trong thực tiễn và trong kinh tế. + Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học.
HOẠT ĐỘNG LUYỆN TẬP Mục tiêu: Củng cố các kiến thức về đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu xuất hiện trong thực tiễn và trong kinh tế. Nội dung: Thực hiện phần ví dụ và giải một số bài tập tự luận trong SGK. Sản phẩm: Lời giải các bài tập của HS. Tổ chức thực hiện: Gọi một số HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi lời giải và nhận xét (các bài tập do GV lựa chọn). Sau đó GV nhận xét bài làm, tổng kết phương pháp giải, lưu ý sai lầm thường mắc, ...		
Bài 2.14 SGK (8 phút) – GV tổ chức cho HS làm Bài 2.14 SGK.		+ Mục đích của phần này là cung cấp một tình huống để HS rèn luyện

+ GV cho HS hoạt động cá nhân trong 6 phút, sau đó GV gọi 1 HS lên bảng trình bày bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.	– HS thực hiện Bài 2.14 và ghi bài.	kĩ năng ứng dụng các kiến thức về đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu xuất hiện trong thực tiễn và trong kinh tế. + Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học.
Bài 2.15 SGK (10 phút) – GV tổ chức cho HS làm Bài 2.15 SGK. + GV cho HS hoạt động cá nhân trong 8 phút, sau đó GV gọi 1 HS lên bảng trình bày bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.	– HS thực hiện Bài 2.15 và ghi bài.	+ Mục đích của phần này là cung cấp một tình huống để HS rèn luyện kĩ năng ứng dụng các kiến thức về đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu xuất hiện trong thực tiễn và trong kinh tế. + Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học.
Bài 2.16 SGK (10 phút) – GV tổ chức cho HS làm Bài 2.16 SGK. + GV cho HS hoạt động theo nhóm đôi trong 8 phút, sau đó GV gọi 1 HS lên bảng trình bày bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.	– HS thực hiện Bài 2.16 và ghi bài.	+ Mục đích của phần này là cung cấp một tình huống để HS rèn luyện kĩ năng ứng dụng các kiến thức về đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu xuất hiện trong thực tiễn và trong kinh tế. + Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học.
Bài 2.17 SGK (8 phút) – GV tổ chức cho HS làm Bài 2.17 SGK. + GV cho HS hoạt động cá nhân trong 6 phút, sau đó GV gọi 2 HS lên bảng trình bày bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.	– HS thực hiện Bài 2.17 và ghi bài.	+ Mục đích của phần này là cung cấp một tình huống để HS rèn luyện kĩ năng ứng dụng các kiến thức về đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu xuất hiện trong thực tiễn và trong kinh tế. + Góp phần phát triển năng lực mô hình hoá toán học, năng lực tư duy và lập luận toán học.
TỔNG KẾT VÀ HƯỚNG DẪN CÔNG VIỆC Ở NHÀ GV tổng kết lại nội dung bài học và dặn dò công việc ở nhà cho HS (2 phút) – GV tổng kết lại các kiến thức trọng tâm của bài học: Vận dụng đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu.		

PHỤ LỤC. PHIẾU HỌC TẬP SỐ 1

Câu 1. Cho các khái niệm sau: **miền chấp nhận được, phương án chấp nhận được, một phương án tối ưu, hàm mục tiêu, giá trị tối ưu, quy hoạch tuyến tính hai biến, phương án khả thi.** Hãy điền các khái niệm ở trên vào đoạn dưới đây để hoàn thành đoạn sau.

Tìm giá trị lớn nhất (tương ứng, giá trị nhỏ nhất) của biểu thức $F(x, y) = Ax + By$ trên miền nghiệm S của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$S: \begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \dots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \end{cases} \quad (1)$$

ở đó A, B là hai số thực cho trước, không đồng thời bằng 0.

Các bài toán như vậy gọi là bài toán..... Biểu thức $F(x,y)$ ở trên gọi là.....

Mỗi bất phương trình trong hệ (1) gọi là một ràng buộc. Nếu $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ (1) thì ta nói $(x_0; y_0)$ là một..... hoặc của bài toán. Tập các phương án chấp nhận được còn gọi là..... Nếu $F(x,y)$ đạt giá trị lớn nhất (tương ứng, giá trị nhỏ nhất) trên miền nghiệm S tại $(x_0; y_0)$ thì cặp $(x_0; y_0)$ gọi là..... của bài toán và giá trị $F(x_0; y_0)$ gọi là

Câu 2. Hãy sắp xếp các ý sau để hoàn thành các bước giải bài toán tối ưu bằng cách sử dụng đạo hàm

- (1). Xác định hệ bất phương trình bậc nhất gồm tất cả các ràng buộc của bài toán.
- (2). Tính giá trị của hàm mục tiêu tại các điểm cực biên, từ đó suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu rồi kết luận.
- (3). Đặt biến.
- (4). Biểu diễn tập các phương án chấp nhận được. Tìm các phương án cực biên.
- (5). Xác định hàm mục tiêu.

HD.

Câu 1. Trang 24, 27 (SGK).

Câu 2. (3) – (5) – (1) – (4) – (2).

PHIẾU HỌC TẬP SỐ 2

Câu 1. Cho các khái niệm sau: **miền chấp nhận được, phương án chấp nhận được, một phương án tối ưu, hàm mục tiêu, giá trị tối ưu, quy hoạch tuyến tính hai biến, phương án khả thi.** Hãy điền các khái niệm ở trên vào đoạn dưới đây để hoàn thành đoạn sau.

Tìm giá trị lớn nhất (tương ứng, giá trị nhỏ nhất) của biểu thức $F(x,y) = Ax + By$ trên miền nghiệm S của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$S: \begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \dots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \end{cases} \quad (1)$$

ở đó A, B là hai số thực cho trước, không đồng thời bằng 0.

Các bài toán như vậy gọi là bài toán..... Biểu thức $F(x,y)$ ở trên gọi là.....

Mỗi bất phương trình trong hệ (1) gọi là một ràng buộc. Nếu $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ (1) thì ta nói $(x_0; y_0)$ là một..... hoặc của bài toán. Tập các phương án chấp nhận được còn gọi là..... Nếu $F(x,y)$ đạt giá trị lớn nhất (tương ứng, giá trị nhỏ nhất) trên miền nghiệm S tại $(x_0; y_0)$ thì cặp

$(x_0; y_0)$ gọi là..... của bài toán và giá trị $F(x_0; y_0)$ gọi là

.....

Câu 2. Cho các cụm từ sau: **hàm doanh thu biên, chi phí biên, hàm lợi nhuận biên.** Hãy điền các từ ở trên vào đoạn dưới đây để hoàn thành khái niệm trong kinh tế học.

.....là tốc độ thay đổi của hàm chi phí $C(x)$ đối với x , tức là đạo hàm $C'(x)$.

Đạo hàm $R'(x)$ của hàm doanh thu $R(x)$ được gọi là.....và là tốc độ thay đổi của doanh thu đối với số lượng đơn vị sản phẩm bán ra.

.....là đạo hàm $P'(x)$ của hàm lợi nhuận.

TRẢ LỜI/HƯỚNG DẪN/GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP TRONG SGK

2.11. a) Theo đề bài, ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ 250x + 500y \leq 75000 \\ 750x + 500y \leq 120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + 2y \leq 300 \\ 3x + 2y \leq 480. \end{cases}$$

b) Miền nghiệm của hệ bất phương trình này là OABC trong hình bên với

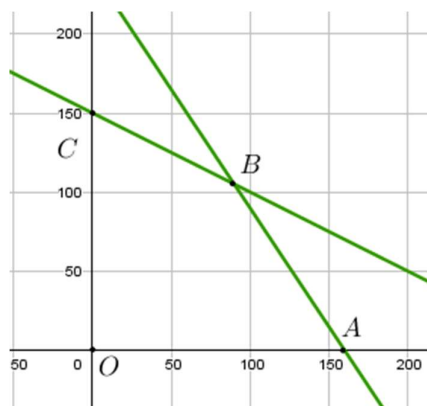
$$O(0;0), A(160;0), B(90;105), C(0;150).$$

c) Lợi nhuận thu được là $F(x; y) = 30x + 40y$

Tính giá trị của biểu thức $F(x; y)$ tại các đỉnh của tứ giác, ta được:

$$F(0;0) = 0, F(160;0) = 4800, F(90;105) = 6900, F(0;150) = 6000.$$

Vậy lợi nhuận thu được lớn nhất là 6900 nghìn đồng khi $x=90$ và $y=105$, tức là cần chuẩn bị 90 gói cà phê tiêu chuẩn và 105 gói cà phê cao cấp.



miền tứ giác

(nghìn đồng).

2.12. Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm thứ nhất và hai của nhà máy.

Theo đề bài, ta có hệ bất phương trình:

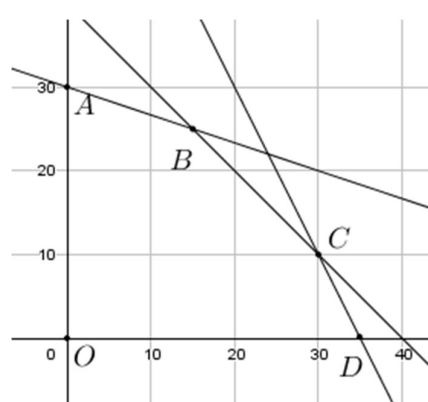
Miền nghiệm của bất phương trình này là miền OABCD như hình bên với $O(0; 0)$, $A(0; 30)$, $C(30; 10)$ và $D(35; 0)$.

Lợi nhuận thu được là $F(x; y) = 400x + 600y$ (nghìn đồng).

Tính giá trị của biểu thức $F(x; y)$ tại các đỉnh của ngũ giác, ta được:

$$F(0;0) = 0, F(0;30) = 18000, F(15;25) = 21000, F(30;10) = 18000, F(35;0) = 14000.$$

Vậy lợi nhuận thu được lớn nhất là 21000 nghìn đồng khi $x=15$ và $y=25$, tức là cần sản xuất 15 sản phẩm thứ nhất và 25 sản phẩm thứ hai.



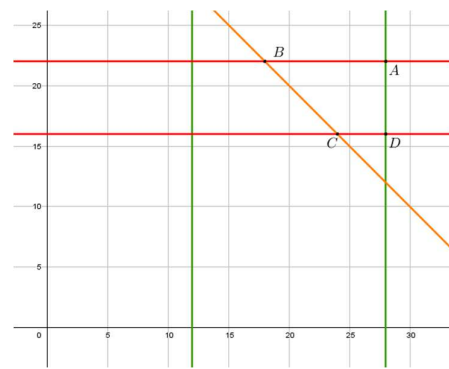
sản phẩm thứ

ngũ giác
B(15; 25),

2.13. Gọi x, y lần lượt là số đại diện bán hàng ở phố Hồ Chí Minh sẽ tham dự cuộc họp.

Theo đề bài, ta có hệ bất phương trình:

Miền nghiệm của bất phương trình này là ABCD như hình bên với $A(28; 22)$, $B(18; 22)$, $D(28; 16)$.



Hà Nội và Thành

$$\begin{cases} 12 \leq x \leq 28 \\ 16 \leq y \leq 22 \\ x + y \geq 40. \end{cases}$$

miền tứ giác
C(24; 16) và

Tổng chi phí vé máy bay là $F(x; y) = 2x + 2,4y$ (triệu đồng). Tính giá trị của biểu thức $F(x; y)$ tại các đỉnh của ngũ giác, ta được:

$$F(28; 22) = 108,8; F(18; 22) = 88,8; F(24; 16) = 86,4; F(28; 16) = 94,4.$$

Vậy tổng chi phí vé máy bay nhỏ nhất là 86,4 triệu đồng khi $x=24$ và $y=16$, tức là cần cử 24 đại diện bán hàng ở Hà Nội và 16 đại diện bán hàng ở Thành phố Hồ Chí Minh đến dự cuộc họp.

2.14. Ta có: $0 \leq \theta < 90^\circ$. Ta có:

$$F'(\theta) = \frac{-cmg(c \cos \theta - \sin \theta)}{(c \sin \theta + \cos \theta)^2}; F'(\theta) = 0 \Leftrightarrow c \cos \theta - \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \tan \theta = c.$$

Giả sử $\theta = \theta_0$ thỏa mãn $\tan \theta_0 = c$.

Khi $0 \leq \theta < \theta_0$ thì $F'(\theta) < 0$, khi $\theta_0 < \theta < 90^\circ$ thì $F'(\theta) > 0$. Do đó lực kéo F nhỏ nhất tại $\theta = \theta_0$ tức là khi $\tan \theta = c$.

2.15. Đặt $BD = x$, ta có $AC = \sqrt{x^2 + 9}$. Khi đó: $\sin D = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}$.

Xét tam giác ACD, ta có

$$\frac{AC}{\sin D} = \frac{CD}{\sin DAC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}} = \frac{4}{\sin DAC} \Leftrightarrow \sin DAC = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 9} \cdot \sqrt{x^2 + 49}}.$$

Để có được tầm nhìn thuận lợi thì góc nhìn θ phải lớn nhất.

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 9} \cdot \sqrt{x^2 + 49}} = \frac{4x}{\sqrt{(x^2 + 9)(x^2 + 49)}} = \frac{4x}{\sqrt{x^4 + 58x^2 + 441}}, x > 0.$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{-4x^4 + 1764}{(x^4 + 58x^2 + 441)\sqrt{x^4 + 58x^2 + 441}} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{21} \approx 4,58.$$

Vậy người đó phải đứng cách tường khoảng 4,58m thì tầm nhìn là thuận lợi nhất.

2.16. Gọi chiều cao cột đèn là h (mét) ($h > 0$).

Ta có:

$$I = \frac{\sin \theta}{s} = \frac{h}{s^2} = \frac{h}{h^2 + 400}, h > 0;$$

$$I' = \frac{h^2 + 400 - 2h^2}{(h^2 + 400)^2} = \frac{400 - h^2}{(h^2 + 400)^2}; I' = 0 \Leftrightarrow h = 20 (\text{do } h > 0).$$

Khi đó tại $h = 20$ thì hàm số $I = \frac{h}{h^2 + 400}$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy khi chiều cao của cột đèn là 20m thì sẽ chiếu sáng mạnh nhất cho lối đi bộ.

2.17. a) Hàm lợi nhuận là

$$P(x) = R(x) - C(x) = x(100 - 0,5x) - 40x - 37,5 = -0,5x^2 + 60x - 37,5.$$

Ta có $P'(x) = -x + 60; P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 60$. Để thấy hàm lợi nhuận $P(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 60$.

Khi đó $p = 100 - 0,5 \cdot 60 = 70$ (nghìn đồng).

Vậy nếu bán mỗi đơn vị hàng hoá với giá 70 nghìn đồng thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.

b) Chi phí trung bình cho mỗi đơn vị sản phẩm là $c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{40x + 37,5}{x}$.

Khi lợi nhuận là lớn nhất thì chi phí trung bình cho mỗi đơn vị sản phẩm là

$c(60) = 40,625$ (nghìn đồng).

