

## Bài 16: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Tiết 42, 43. Ngày 8/12/2025

### I. MỤC TIÊU

#### 1. Kiến thức

- Nhận biết khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm và tại vô cực.
- Nhận biết khái niệm giới hạn một bên.
- Nhận biết khái niệm vô cực.
- Nắm được một vài giới hạn đặc biệt và các quy tắc về giới hạn vô cực.
- Học sinh biết cách tính giới hạn hàm số tại một điểm, tính giới hạn hàm số tại vô cực
- Học sinh phân biệt được các dạng vô định của giới hạn hàm số.

#### 2. Năng lực

- Năng lực tư duy và lập luận toán học: Thông qua việc tính giới hạn của hàm số qua giới hạn của dãy số.
- Năng lực mô hình hóa toán học: Thông qua việc viết công thức hàm số mô tả mối liên quan giữa các đại lượng hình học.
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học: Thông qua các bài toán liên quan đến giới hạn của hàm số
- Năng lực giao tiếp Toán học: Trong các định lý, ví dụ, bài tập.
- Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện để học Toán: Sử dụng máy tính cầm tay.

#### 3. Về phẩm chất:

- Chăm chỉ, hoàn thành các nhiệm vụ được giao.
- Trách nhiệm, cố gắng chiếm lĩnh kiến thức mới, cố gắng làm đúng các bài tập.
- Có thể giới quan khoa học

### II. Thiết bị dạy học và học liệu

- Kế hoạch bài dạy, SGK, phiếu học tập, phấn, thước kẻ, máy chiếu, phần mềm GSP...

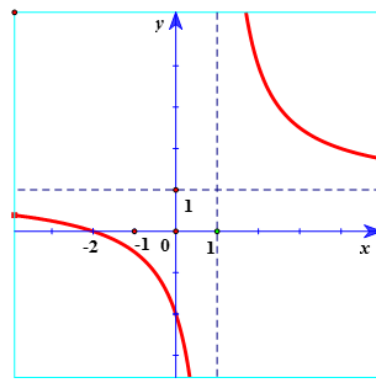
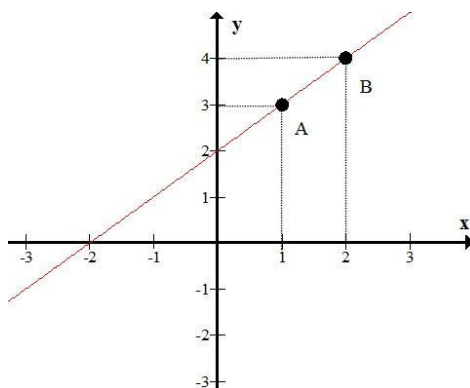
### III. Tiến trình dạy học

#### Tiết 1.

#### 1. HOẠT ĐỘNG KHỞI ĐỘNG: GIỚI THIỆU (3 phút)

a) Mục tiêu: Tạo tình huống để học sinh tiếp cận với khái niệm “giới hạn hàm số tại một điểm”.

b) Nội dung:



H1- Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , em có nhận xét gì về giá trị hàm số khi  $x$  dần đến 2

H2- Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , em có nhận xét gì về giá trị hàm số khi  $x$  dần đến 1

**c) Sản phẩm:**

Câu trả lời của HS

L1- giá trị của hàm số dần về 4

L2- giá trị của hàm số dần về  $-\infty$  khi  $x < 1$  và dần về  $+\infty$  khi  $x > 1$ .

**d) Tổ chức thực hiện:**

\*) **Chuyển giao nhiệm vụ :** GV nêu câu hỏi; trình chiếu đồ thị hai hàm số.

\*) **Thực hiện:** HS suy nghĩ độc lập

\*) **Báo cáo, thảo luận:**

- GV gọi lần lượt 2 hs, đứng tại chỗ trình bày câu trả lời của mình

- Các học sinh khác nhận xét, bổ sung để hoàn thiện câu trả lời.

\*) **Đánh giá, nhận xét, tổng hợp:**

- GV đánh giá thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tổng hợp kết quả.

- Dẫn dắt vào bài mới.

ĐVĐ. Giới hạn hàm số có phải là giá trị của hàm số không? Chúng ta cùng nghiên cứu bài học ngày hôm nay.

## 2. HOẠT ĐỘNG HÌNH THÀNH KIẾN THỨC

### 2.1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

a) **Mục tiêu:** Nhận biết khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm.

b) **Nội dung:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{4-x^2}{x-2}$ .

a) Tìm tập xác định của hàm số  $f(x)$ .

b) Cho dãy số  $x_n = \frac{2n+1}{n}$ . Rút gọn  $f(x_n)$  và tính giới hạn của dãy  $(u_n)$  với  $u_n = f(x_n)$ .

c) Với dãy số  $(x_n)$  bất kì sao cho  $x_n \neq 2$  và  $x_n \rightarrow 2$ , tính  $f(x_n)$  và tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ .

c) **Sản phẩm:** Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

|                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Chuyển giao</b>                  | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm)<br>* Trên cơ sở câu trả lời của học sinh, giáo viên chuẩn hóa kiến thức, từ đó giới thiệu về khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại 1 điểm.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <b>Thực hiện</b>                    | Nhóm – tại lớp.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Báo cáo thảo luận</b>            | * Cá nhân báo cáo, các nhóm theo dõi thảo luận.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Đánh giá, nhận xét, tổng hợp</b> | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức :<br><div><math display="block">\text{Giả sử } (a;b) \text{ là một khoảng chứa điểm } x_0 \text{ và hàm số } y = f(x) \text{ xác định trên khoảng } (a;b), \text{ có thể trừ điểm } x_0. \text{ Ta nói hàm số } f(x) \text{ có giới hạn là số } L \text{ khi } x \text{ dần tới } x_0 \text{ nếu với dãy số } (x_n) \text{ bất}</math></div> |

|  |                                                                                                                                                                                                                                 |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $kì, x_n \in (a; b), x_n \neq x_0 \text{ và } x_n \rightarrow x_0, \text{ ta có } f(x_n) \rightarrow L, \text{ kí hiệu}$<br>$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ hay } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0.$ |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### VÍ DỤ:

a) **Mục tiêu:** Tính giới hạn hữu hạn của hàm số cụ thể bằng cách sử dụng định nghĩa.

b) **Nội dung:** **Ví dụ 1.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ . Chứng tỏ rằng  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$ .

c) **Sản phẩm:** Câu trả lời của học sinh

d) **Tổ chức thực hiện:**

|                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Chuyển giao</b>                  | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm)<br>Gv yêu cầu hs tìm TXĐ, tính $f(x_n)$ và giới hạn $\lim_{x_n \rightarrow 1} f(x_n)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Thực hiện</b>                    | Học sinh lên bảng và thực hiện $\lim_{x_n \rightarrow 1} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow 1} \frac{1}{x_n + 1} = \frac{1}{2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Báo cáo thảo luận</b>            | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Đánh giá, nhận xét, tổng hợp</b> | <p>- GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo</p> <p>- Chốt kiến thức :</p> <p>Lấy dãy số <math>(x_n)</math> bất kì sao cho <math>x_n \neq 1</math> và <math>x_n \rightarrow 1</math>. Ta có <math>f(x_n) = \frac{x_n - 1}{x_n^2 - 1} = \frac{1}{x_n + 1}</math>.</p> <p>Do đó <math>\lim_{x_n \rightarrow 1} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow 1} \frac{1}{x_n + 1} = \frac{1}{2}</math>. Vậy <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}</math>.</p> |

## 2.2. QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM:

a) **Mục tiêu:** Hình thành các quy tắc tính giới hạn.

b) **Nội dung:**

a)

-  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$  với  $c$  là hằng số.

-  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$  với  $n \in \mathbb{N}$ .

li

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ , nếu  $M \neq 0$ .

b) Nếu  $f(x) \geq 0$  với mọi  $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$  và  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

thì  $L \geq 0$  và  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ .

c) Sản phẩm: Câu trả lời của học sinh.

d) Tổ chức thực hiện

|                                     |                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Chuẩn giao</b>                   | * HS nhắc lại các quy tắc giới hạn của dãy số<br>GV ghi bảng hoặc chiếu lại nội dung quy tắc.                                                                                                                                                       |
| <b>Thực hiện</b>                    | Học sinh làm việc nhóm                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>Báo cáo thảo luận</b>            | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận.                                                                                                                                                                                       |
| <b>Đánh giá, nhận xét, tổng hợp</b> | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức phần nội dung. |

Ví dụ:

a) Mục tiêu:

+ VD2: Thực hành các quy tắc giới hạn của hàm số.

+ VD3: Xét TH không thể áp dụng ngay quy tắc tính giới hạn của thương 2 hàm số khi giới hạn của mẫu số bằng 0.

+ Luyện tập 1: củng cố kỹ năng tính giới hạn của hàm số tại một điểm.

b) Nội dung:

**Ví dụ 2.** Cho  $f(x) = x - 1$  và  $g(x) = x^3$ . Tính các giới hạn sau:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x) - g(x)]$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)]^2}{g(x)}$

**Lời giải**

Ta có  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1 - 1 = 0$ . Mặt khác, ta thấy  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1$ .

a) Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} [3f(x)] - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 \cdot 0 - 1 = -1.$$

b) Ta có:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)]^2}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]^2}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{0}{1} = 0.$

**Ví dụ 3.** Tính  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$ .

**Lời giải**

Do mẫu thức có giới hạn là 0 khi  $x \rightarrow 0$  nên ta không thể áp dụng ngay quy tắc tính giới hạn của thương hai hàm số.

Chú ý rằng  $\frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} = \frac{(\sqrt{x+9})^2 - 3^2}{x(\sqrt{x+9} + 3)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+9} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x+9} + 3}.$

Do đó  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+9} + 3} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{x+9} + 3]} = \frac{1}{6}.$

**Luyện tập 1.** Tính  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$

a) Sản phẩm: Câu trả lời của học sinh

**d) Tổ chức thực hiện:**

|                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Chuyển giao</b>                  | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Thực hiện</b>                    | Học sinh lên bảng và thực hiện                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Báo cáo thảo luận</b>            | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Đánh giá, nhận xét, tổng hợp</b> | <p>- GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo</p> <p>- Chốt kiến thức :</p> <p><b>VD2</b></p> <p>Ta có <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1 - 1 = 0</math>.</p> <p>Mặt khác, ta thấy <math>\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1</math>.</p> <p>a) Ta có</p> $\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} [3f(x)] - \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ $= \lim_{x \rightarrow 1} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 \cdot 0 - 1 = -1.$ |

$$\text{b) Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)]^2}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]^2}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

VD3. Do mẫu thức có giới hạn là 0 khi  $x \rightarrow 0$  nên ta không thể áp dụng ngay quy tắc tính giới hạn của thương hai hàm số.

$$\text{Chú ý rằng } \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \frac{(\sqrt{x+9})^2 - 3^2}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+9}+3}.$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{x+9}+3]} = \frac{1}{6}.$$

### 2.3. GIỚI HẠN MỘT BÊN

**a) Mục tiêu:** Giúp HS hình thành khái niệm giới hạn một bên của hàm số.

**b) Nội dung:**

$$\text{Cho hàm số } f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}.$$

$$\text{a) Cho } x_n = \frac{n}{n+1} \text{ và } x'_n = \frac{n+1}{n}. \text{ Tính } y_n = f(x_n) \text{ và } y'_n = f(x'_n).$$

$$\text{b) Tìm giới hạn của các dãy số } (y_n) \text{ và } (y'_n).$$

$$\text{c) Cho các dãy số } (x_n) \text{ và } (x'_n) \text{ bất kì sao cho } x_n < 1 < x'_n \text{ và } x_n \rightarrow 1, x'_n \rightarrow 1, \text{ tính } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n).$$

**c) Sản phẩm:** Câu trả lời của HS

**d) Tổ chức thực hiện:**

**\*) Chuyển giao nhiệm vụ :** GV nêu câu hỏi.

**\*) Thực hiện:** HS suy nghĩ độc lập

**\*) Báo cáo, thảo luận:**

- GV gọi lần lượt 2 hs, đứng tại chỗ trình bày câu trả lời của mình

- Các học sinh khác nhận xét, bổ sung để hoàn thiện câu trả lời.

**\*) Đánh giá, nhận xét, tổng hợp:**

- GV đánh giá thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tổng hợp kết quả.

**Khái niệm giới hạn một bên:**

- Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $(x_0; b)$ . Ta nói số  $L$  là **giới hạn bên phải** của  $f(x)$  khi  $x \rightarrow x_0$  nếu với dãy số  $(x_n)$  bất kì thoả mãn  $x_0 < x_n < b$  và  $x_n \rightarrow x_0$ , ta có  $f(x_n) \rightarrow L$ , kí hiệu  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ .

- Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $(a; x_0)$ . Ta nói số  $L$  là **giới hạn bên trái** của  $f(x)$  khi  $x \rightarrow x_0$  nếu với dãy số  $(x_n)$  bất kì thoả mãn  $a < x_n < x_0$  và  $x_n \rightarrow x_0$ , ta có  $f(x_n) \rightarrow L$ , kí hiệu  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ .

Chú ý:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ khi và chỉ khi}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

**Ví dụ 4:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ x+1 & \text{nếu } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

Tính  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

**Lời giải**

Với dãy số  $(x_n)$  bất kì sao cho  $0 < x_n < 1$  và  $x_n \rightarrow 1$ , ta có  $f(x_n) = x_n^2$ .

Do đó  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 1$ .

Tương tự, với dãy số  $(x_n)$  bất kì mà  $1 < x_n < 2, x_n \rightarrow 1$ , ta có  $f(x_n) = x_n + 1$ , cho nên  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 2$

**Luyện tập 2:**

**a) Mục tiêu:** Tính được giới hạn một bên.

**b) Nội dung:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} -x & \text{nếu } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$

Tính  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**c) Sản phẩm:** Câu trả lời của học sinh.

**d) Tổ chức thực hiện:**

|                                     |                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Chuyển giao</b>                  | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm)<br>Gv yêu cầu hs tính $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .                                             |
| <b>Thực hiện</b>                    | Học sinh thực hiện theo nhóm.                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Báo cáo thảo luận</b>            | * Gọi 1 HS báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận.                                                                                                                                                                               |
| <b>Đánh giá, nhận xét, tổng hợp</b> | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức : |

**Luyện tập 3: Hướng dẫn HS làm bài tập 5.7; 5.8; 5.11 sách giáo khoa.**

**5.7.** Cho hai hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  và  $g(x) = x + 1$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

**a)**  $f(x) = g(x)$ ;

**b)**  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ .

**HD:** a)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 = g(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$

Vậy b đúng; a đúng khi x khác 1.

**5.8.** Tính các giới hạn sau:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 2)^2 - 4}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$ .

Đây là giới hạn dạng  $\frac{0}{0}$

Phần a cần khai triển hằng đẳng thức rồi giản ước tử và mẫu để khử dạng  $\frac{0}{0}$

Phần b nhân cả tử và mẫu với lượng liên hợp của tử rồi khử dạng  $\frac{0}{0}$   
HS có thể dùng MTCT để tính. nếu

KQ: a) 4

b) 1/6

**5.11.** Cho hàm số  $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|x - 2|}$ .

Tìm  $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ .

**HD:** Xét 2 TH  $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|x - 2|} = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, & x > 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{2 - x}, & x < 2 \end{cases}$

Từ đó tính các giới hạn và đc kq là -1 và 1

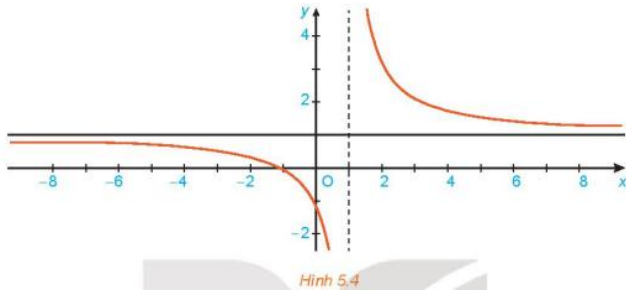
## Tiết 2

### 1. HOẠT ĐỘNG HÌNH THÀNH KIẾN THỨC

#### HD1.1: GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

a) **Mục tiêu:** Nhận biết khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực.

b) **Nội dung:** Cho hàm số  $f(x) = 1 + \frac{2}{x - 1}$  có đồ thị như hình vẽ



Giả sử  $(x_n)$  là dãy số sao cho  $x_n > 1, x_n \rightarrow +\infty$ . Tính  $f(x_n)$  và tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ .

c) Sản phẩm: Câu trả lời của học sinh

d) Tổ chức thực hiện:

|                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Chuyển giao</b>                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>* GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm)</li> <li>* Trên cơ sở câu trả lời của học sinh, giáo viên chuẩn hóa kiến thức, từ đó giới thiệu về khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Thực hiện</b>                    | Theo nhóm – tại lớp.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Báo cáo thảo luận</b>            | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Đánh giá, nhận xét, tổng hợp</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo</li> <li>- Chốt kiến thức :<br/>Ta có khái niệm sau đây</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|                                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Cho hàm số <math>y = f(x)</math> xác định trên khoảng <math>(a; +\infty)</math>. Ta nói hàm số <math>f(x)</math> có giới hạn là số <math>L</math> khi <math>x \rightarrow +\infty</math> nếu với dãy số <math>(x_n)</math> bất kì, <math>x_n &gt; a</math> và <math>x_n \rightarrow +\infty</math>, ta có <math>f(x_n) \rightarrow L</math>. kí hiệu <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L</math> hay <math>f(x) \rightarrow L</math> khi <math>x \rightarrow +\infty</math>.</li> <li>- Cho hàm số <math>y = f(x)</math> xác định trên khoảng <math>(-\infty; b)</math>. Ta nói hàm số <math>f(x)</math> có giới hạn là số <math>L</math> khi <math>x \rightarrow -\infty</math> nếu với dãy số <math>(x_n)</math> bất kì, <math>x_n &lt; b</math> và <math>x_n \rightarrow -\infty</math>, ta có <math>f(x_n) \rightarrow L</math>, kí hiệu <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L</math> hay <math>f(x) \rightarrow L</math> khi <math>x \rightarrow -\infty</math>.</li> </ul> |
|                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |

**Ví dụ 1.** Cho  $f(x) = 2 + \frac{4}{x-1}$ . Sử dụng định nghĩa, tìm  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Lời giải**

Lấy dãy  $(x_n)$  bất kì sao cho  $x_n > 1$  và  $x_n \rightarrow +\infty$ , ta có  $f(x_n) = 2 + \frac{4}{x_n-1}$ . Do đó  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 2$ .

Vậy  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ . Tương tự, ta cũng có  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ .

- Các quy tắc tính giới hạn hữu hạn tại một điểm cũng đúng cho giới hạn hữu hạn tại vô cực.

- Với  $c$  là hằng số, ta có:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

**Ví dụ 2.** Tính  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ .

**Giải**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} \right) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)} = -\sqrt{1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}} = -1.$$

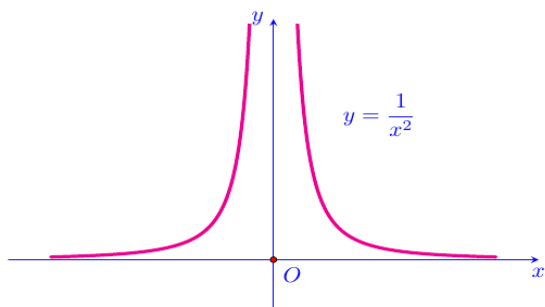
## HD1.2. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

### HD 1.2.1. Giới hạn vô cực

**a) Mục tiêu:** Nhận biết khái niệm giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm.

**b) Nội dung:** Nhận biết khái niệm giới hạn vô cực. Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  có đồ thị như Hình 5.6. Cho  $x_n = \frac{1}{n}$ ,

chứng tỏ rằng  $f(x_n) \rightarrow +\infty$ .



Hình 5.6

Giả sử khoảng  $(a; b)$  chứa  $x_0$  và hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $(a; b) \setminus \{x_0\}$ . Ta nói hàm số  $f(x)$  có giới hạn  $+\infty$  khi  $x \rightarrow x_0$  nếu với dãy số  $(x_n)$  bất kì,  $x_n \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ , ta có  $f(x_n) \rightarrow +\infty$ , kí hiệu  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .

Ta nói hàm số  $f(x)$  có giới hạn  $-\infty$  khi  $x \rightarrow x_0$ , kí hiệu  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} [-f(x)] = +\infty$ .

**Ví dụ 3.** Tính  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|}$ .

**Giải**

Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$ . Lấy dãy số  $(x_n)$  bất kì sao cho  $x_n \neq 1$ ,  $x_n \rightarrow 1$ . Khi đó,  $|x_n - 1| \rightarrow 0$ .

Do đó  $f(x_n) = \frac{1}{|x_n - 1|} \rightarrow +\infty$ . Vậy  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty$ .

c) Sản phẩm: Câu trả lời của học sinh

d) Tổ chức thực hiện:

|                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Chuyển giao</b>                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>* GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm)</li> <li>* Trên cơ sở câu trả lời của học sinh, giáo viên chuẩn hóa kiến thức, từ đó giới thiệu về khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số.</li> </ul>                                    |
| <b>Thực hiện</b>                    | Theo nhóm – tại lớp.                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Báo cáo thảo luận</b>            | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận.                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Đánh giá, nhận xét, tổng hợp</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo</li> <li>- Chốt kiến thức :</li> </ul> |

**Một số giới hạn đặc biệt:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty \text{ Với } k \text{ nguyên dương;}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty \text{ với } k \text{ là số chẵn;}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty \text{ với } k \text{ là số lẻ.}$$

### HD 1.2.2. Một số quy tắc tính giới hạn vô cực

Chú ý các quy tắc tính giới hạn hữu hạn không còn đúng cho giới hạn vô cực.

Ta có một số quy tắc tính giới hạn của tích và thương hai hàm số khi một trong hai hàm số đó có giới hạn vô cực.

Quy tắc tìm giới hạn của tích  $f(x).g(x)$ .

Giả sử  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$  và  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$  (hoặc  $-\infty$ ). Khi đó  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).g(x)$  được tính theo quy tắc

cho trong bảng sau:

| $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ |
|---------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| $L > 0$                         | $+\infty$                       | $+\infty$                           |
|                                 | $-\infty$                       | $-\infty$                           |
| $L < 0$                         | $+\infty$                       | $-\infty$                           |
|                                 | $-\infty$                       | $+\infty$                           |

Quy tắc tìm giới hạn của thương  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

| $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ | Dấu của $g(x)$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------|----------------------------------------------|
| $L$                             | $+\infty$                       | Tùy ý          | 0                                            |
|                                 |                                 | +              | $+\infty$                                    |

|         |   |           |           |
|---------|---|-----------|-----------|
| $L > 0$ | 0 | –         | $-\infty$ |
| $L < 0$ | 0 | +         | $-\infty$ |
|         |   | $-\infty$ | $+\infty$ |

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp  $x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-$ .

**Ví dụ 4.** Tính  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2}$ .

**Giải**

Ta sử dụng quy tắc tìm giới hạn của thương. Rõ ràng, giới hạn của tử số  $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$ .

Ngoài ra, mẫu số nhận giá trị dương với mọi  $x \neq 0$  và  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ . Do vậy  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2} = +\infty$ .

**Ví dụ 5.** Tính  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x(1-x)}$  và  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x(1-x)}$ .

**Giải**

Viết  $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x}$ , ta có  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 > 0$ . Hơn nữa  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$  do  $1-x < 0$  khi  $x > 1$ .

Áp dụng quy tắc tìm giới hạn của tích, ta được  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x(1-x)} = -\infty$ .

Lí luận tương tự, ta có  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x(1-x)} = +\infty$ .

## 2. HOẠT ĐỘNG LUYỆN TẬP:

### 2.1. Luyện tập 1.

a) **Mục tiêu:** Củng cố kĩ năng tính giới hạn của hàm số tại vô cực.

b) **Nội dung:** Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}$ .

c) **Sản phẩm:** Câu trả lời của học sinh

d) **Tổ chức thực hiện:**

|                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Chuyển giao</b>                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>* GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm)</li> <li>* GV hướng dẫn hs cách tính.</li> </ul>                                                                                                                                        |
| <b>Thực hiện</b>                    | Theo nhóm – tại lớp.                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Báo cáo thảo luận</b>            | * Đại diện nhóm báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận.                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Đánh giá, nhận xét, tổng hợp</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo</li> <li>- Chốt kiến thức :</li> </ul> |

### 2.2. Luyện tập 2

a) **Mục tiêu:** Tính được giới hạn một bên.

b) **Nội dung:** Tính  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2}$  và  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x-2}$ .

c) **Sản phẩm:** Câu trả lời của học sinh.

d) **Tổ chức thực hiện:**

|                                     |                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Chuyển giao</b>                  | * GV tổ chức hoạt động trao đổi thảo luận của các nhóm (6 nhóm )<br>Gv yêu cầu hs tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2}$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x-2}$ .                                                    |
| <b>Thực hiện</b>                    | Học sinh thực hiện theo nhóm.                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Báo cáo thảo luận</b>            | * Gọi 1 HS báo cáo, các nhóm còn lại theo dõi thảo luận.                                                                                                                                                                               |
| <b>Đánh giá, nhận xét, tổng hợp</b> | - GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. Động viên các học sinh còn lại tích cực, cố gắng hơn trong các hoạt động học tiếp theo<br>- Chốt kiến thức : |

### 2.3 Luyện tập 3

Hướng dẫn HS làm bài tập 5.10; 5.12 sách giáo khoa.

5.10. Tính các giới hạn một bên:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - x + 1}{4 - x}$

**HD:** Ta sử dụng quy tắc tìm giới hạn của thương

Kq: a)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$       b)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - x + 1}{4 - x} = +\infty$

5.12. Tính các giới hạn sau:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - x)$ .

**HD:** a) Làm tương tự như luyện tập 1. KQ: -2

b) Nhân chia với lượng liên hợp, sau đó chia cả tử và mẫu cho x rồi áp dụng giới hạn đặc biệt. KQ: 1

### 3. HOẠT ĐỘNG VẬN DỤNG TÌM TÒI MỞ RỘNG

**Mục tiêu:** Rèn luyện cho học sinh kỹ năng tham gia hoạt động nhóm, tìm hiểu tư liệu trên mạng, kỹ năng tự học và tự nghiên cứu ở nhà.

| Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh                                                                                             | Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Cho học sinh nghiên cứu các bài tập sau:<br>* <b>Bài toán 1:</b> Theo dự đoán tỉ lệ tuổi thọ con người của một nước đang phát triển, sau x năm kể từ bây |                                              |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>giờ là: <math>T(x) = \frac{138x+236}{2x+5}</math> năm . Hỏi tuổi thọ của con người sẽ đạt được tới mức Giới hạn là bao nhiêu?</p> <p>* Tính các giới hạn sau:</p> <p>a/ <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{12x+1}}{4x}</math></p> <p>b/ <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x}</math></p> <p>c/ <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}</math></p> <p>thuật toán: <math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \frac{0}{0}</math></p> <p>phân tích <math>\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)+c}{g(x)} + \frac{f_2(x)-c}{g(x)}</math></p> <p>gọi <math>\alpha_i</math> (<math>i=1;2;3...</math>) là nghiệm của <math>g(x)=0</math></p> <p>khi đó c là nghiệm của hệ <math>\begin{cases} f_1(\alpha_i)+c=0 \\ f_2(\alpha_i)-c=0 \end{cases} \Rightarrow c?</math></p> <p>bài tập về nhà:</p> <p>d/ <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}</math></p> <p>e/ <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}</math></p> <p>g/ <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}</math></p> | <p>69 tuổi.</p> <p>a/ <math>\frac{0}{0}</math> , đáp số -1 ( nhân lượng liên hợp)</p> <p>b/ đặt <math>t = \sqrt[n]{1+ax}, x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 1</math><br/> <math>ax = t^n - 1 = (t-1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + t + 1)</math><br/> <math>\Rightarrow \frac{t-1}{x} = \frac{a}{t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + t + 1}</math><br/> <math>\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{x} = \frac{a}{n}</math></p> <p>c/</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - 2}{x^2-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2+7} - 2}{x^2-1}</math><br/> <math>= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{(x^2-1)(\sqrt{5-x^3}+2)} = \dots = -\frac{3}{8}</math><br/> <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7} - 2}{x^2-1} = \dots = \frac{1}{12}</math><br/> <math>\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1} = -\frac{11}{24}</math></p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### 4. CÂU HỎI/BÀI TẬP KIỂM TRA, ĐÁNH GIÁ CHỦ ĐỀ THEO ĐỊNH HƯỚNG PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC

1

NHẬN BIẾT

**Câu 1:** Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây ?

A.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-2} = 1.$

B.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-2} = 5.$

C.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-2} = -1.$

D. Hàm số  $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$  không có giới hạn khi  $x \rightarrow 3.$

**Đáp án B**

**Lời giải**

Hàm số  $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$  xác định trên các khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ . Ta có  $3 \in (2; +\infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = \frac{3+2}{3-2} = 5.$$

**Câu 2**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 5x)$  bằng:

A.  $-2.$

B.  $3.$

C.  $+\infty.$

D.  $-\infty.$

**Đáp án C**

**Lời giải**

Ta có  $-2x^3 + 5x = x^3 \left( -2 + \frac{5}{x^2} \right).$

Vì  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -2 + \frac{5}{x^2} \right) = -2 < 0$  nên  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left( -2 + \frac{5}{x^2} \right) = +\infty.$

**2**

**THÔNG HIỂU**

**Câu 3:** Cho hàm số  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ . Khẳng định nào dưới đây đúng ?

A.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$

B.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$

C.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$

D.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  không tồn tại.

**Đáp án B.**

**Lời giải**

Hàm số  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$  xác định trên  $\mathbb{R}.$

Có thể giải nhanh như sau : Vì  $x^2 - 2x + 5$  là một hàm đa thức của  $x$  nên có giới hạn tại vô cực. Mà

$\sqrt{x^2 - 2x + 5} > 0$  với mọi  $x$  nên giới hạn của  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$  tại  $-\infty$  chắc chắn là  $+\infty.$

Thật vậy, ta có  $\sqrt{x^2 - 2x + 5} = \sqrt{x^2 \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} = |x| \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}.$

Vì  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = 1 > 0$  nên  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = +\infty.$

**Câu 4:** Giới hạn của hàm số  $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}$  khi  $x \rightarrow -\infty$  bằng:

A.  $-\infty.$

B.  $+\infty.$

C.  $-1.$

D.  $3.$

**Đáp án A.****Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1} &= \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} \\ &=|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\end{aligned}$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right) = 1-2 = -1 < 0.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\right] = -\infty$$

**Câu 5:** Xét bài toán “Tìm  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}$ ”, bạn Hà đã giải như sau:

$$\text{Bước 1: Vì } \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2-5x+2) = 0.$$

$$\text{Bước 2: } 2x^2-5x+2 > 0 \text{ với } x < 2 \text{ và } x \text{ đủ gần } 2,$$

$$\text{Bước 3: } \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2+x-1) = 13 > 0$$

$$\text{Bước 4: nên theo quy tắc 2, } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2} = +\infty.$$

Hỏi lời giải trên của bạn Hà đã sai từ bước thứ mấy ?

**A.** Bước 1.

**B.** Bước 2.

**C.** Bước 3.

**D.** Bước 4.

**Đáp án B****Lời giải**

Xét dấu biểu thức  $g(x) = 2x^2 - 5x + 2$  ta thấy  $g(x) < 0$  với mọi  $x \in (1; 2)$ .

Vậy lời giải sai từ bước 2. (Lời giải đúng cho ra kết quả  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2} = -\infty$ ).

**3****VẬN DỤNG**

**Câu 6:** Tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - x^n}{x-1}$  ( $m, n \in \mathbb{N}^*$ ), ta được kết quả:

**A.**  $+\infty$ .

**B.**  $m-n$ .

**C.**  $m$ .

**D.** 1.

**Đáp án B****Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - x^n}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^m - 1}{x-1} - \frac{x^n - 1}{x-1} \right).$$

Lại có  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1) = m.$

Tương tự:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n.$

Vậy  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - x^n}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^m - 1}{x - 1} - \frac{x^n - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = m - n.$

**Câu 7:** Giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$  bằng:

- A. 1.                      B. 0.                      C.  $+\infty$ .                      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Đáp án B**

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2}}{x-1} &= \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} + \frac{1-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1} \\ &= \frac{2x-2}{(\sqrt{2x-1}+1)(x-1)} + \frac{3-3x}{(1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2})(x-1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} - \frac{3}{1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}}. \end{aligned}$$

Tac có:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} - \frac{3}{1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}} \right] = 0.$

Do đó  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2}}{x-1} = 0.$

**Câu 8:** Giả sử  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax}-1}{2x} = L$ . Hệ số  $a$  bằng bao nhiêu để  $L = 3$  ?

- A. -6.                      B. 6.                      C. -12.                      D. 12.

**Đáp án D**

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax}-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{2x(\sqrt{1+ax}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{2(\sqrt{1+ax}+1)} = \frac{a}{4}$$

Vậy  $L = \frac{a}{4}$ . Do đó  $L = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{4} = 3 \Leftrightarrow a = 12.$

**4**

**VẬN DỤNG CAO**

**Câu 9:** Tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{6x-5} - \sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}.$

A. 0.

B. -2.

C.  $+\infty$ .

D.  $-\infty$ .

**Đáp án B**

**Lời giải**

Đặt  $t = x - 1$  thì  $x = t + 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} t = 0$  và

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} &= \frac{\sqrt[3]{6t+1}-\sqrt{4t+1}}{t^2} = \frac{\sqrt[3]{6t+1}-(2t+1)}{t^2} + \frac{(2t+1)-\sqrt{4t+1}}{t^2} \\&= \frac{6t+1-(8t^3+12t^2+6t+1)}{t^2 \left[ \sqrt[3]{(6t+1)^2} + (2t+1) \cdot \sqrt[3]{6t+1} + (2t+1)^2 \right]} + \frac{(4t^2+4t+1)-(4t+1)}{t^2 (2t+1+\sqrt{4t+1})} \\&= \frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2} + (2t+1) \cdot \sqrt[3]{6t+1} + (2t+1)^2} + \frac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}}.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2} + (2t+1) \cdot \sqrt[3]{6t+1} + (2t+1)^2} + \frac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}} \right).$$

$$\text{Mà } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2} + (2t+1) \cdot \sqrt[3]{6t+1} + (2t+1)^2} = -\frac{12}{3} = -4; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} = -4 + 2 = -2.$$