

**QUY TẮC ĐẾM**

**23**

❶. Giáo viên Văn Quý Vênh

❷. Tiết 83 – 86. Ngày 30/3/2025

|  |  |
| --- | --- |
| **THUẬT NGỮ**   * Quy tắc cộng * Quy tắc nhân * Sơ đồ hình cây | **KIẾN THỨC, KĨ NĂNG**   * Vận dụng quy tắc cộng, quy tắc nhân để tính toán số cách thực hiện một công việc hoặc đếm số phần tử của một tập hợp. * Vận dụng sơ đồ hình cây trong các bài toán đếm đơn giản. |

Đếm là một bài toán cổ xưa nhất của nhân loại. Trong khoa học và trong cuộc sống, người ta cần đếm các đối tượng để giải quyết các vấn đề khác nhau. Chẳng hạn như bài toán sau:

Mỗi mật khẩu của một trang web là một dãy có từ 2 tới 3 kí tự, trong đó kí tự đầu tiên là một trong 26 chữ cái in thường trong bảng chữ cái tiếng Anh (từ a đến z), mỗi kí tự còn lại là một chữ số từ 0 đến 9. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu mật khẩu khác nhau?

Bài học này sẽ giúp em hiểu và áp dụng hai quy tắc đếm cơ bản để giải quyết bài toán trên.

**1. QUY TẮC CỘNG VÀ SƠ ĐỒ HÌNH CÂY**

**HĐ1:** *Chọn chuyến đi (H.8.1)*

|  |  |
| --- | --- |
| Từ Hà Nội vào Vinh mỗi ngày có 7 chuyến tàu hỏa và 2 chuyến máy bay. Bạn An muốn ngày Chủ nhật này đi từ Hà Nội vào Vinh bằng tàu hỏa hoặc máy bay.  Hỏi bạn An có bao nhiêu cách chọn chuyến đi? |  |

**Hướng dẫn:** Để đi từ Hà Nội vào Vinh, bạn An có thể chọn đi bằng tàu hỏa hoặc máy bay.

- Đi bằng tàu hỏa, có thể chọn 1 trong 7 chuyến tàu

- Đi bằng máy bay, có thể chọn 1 trong 2 chuyến bay.

Vậy số cách chọn chuyến đi từ Hà Nội vào Vinh là  (cách chọn).

**HĐ2:** *Chọn vé tàu (H.8.2)*

|  |  |
| --- | --- |
| Bạn An đã quyết định mua vé tàu đi từ Hà Nội vào Vinh trên chuyến tàu SE7. Trên tàu có các toa ghế ngồi và các toa giường nằm. Toa ngồi có hai loại vé: ngồi cứng và ngồi mềm. Toa nằm có loại khoang 4 giường và khoang 6 giường. Khoang 4 giường có hai loại vé: tầng 1 và tầng 2, khoang 6 giường có ba loại vé: tầng 1, tầng 2 và tầng 3. Hỏi:  a) Có bao nhiêu loại vé ghế ngồi và bao nhiêu loại vé giường nằm?  b) Có bao nhiêu loại vé để bạn An lựa chọn? |  |

**Hướng dẫn:** Để mua vé tàu từ Hà Nội vào Vinh trên chuyến tàu SE7, bạn An có thể chọn ghế ngồi hoặc giường nằm

- Vé ngồi: có 2 loại vé

- Giường nằm: có  (loại vé)

Vậy số loại vé để bạn An có thể lựa chọn là  (loại vé).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Quy tắc cộng   |  |  | | --- | --- | | Giả sử một công việc nào đó có thể thực hiện theo một trong hai phương án khác nhau:  - Phương án 1 có  cách thực hiện.  - Phương án 2 có  cách thực hiện.  Khi đó số cách thực hiện công việc là :  cách | Phương án 1 ………..  cách  Phương án 2 ………..  cách | |

**Chú ý:** Sơ đồ minh họa cách phân chia trường hợp như trong Hình 8.2 được gọi là sơ đồ hình cây. Trong các bài toán đếm, người ta thường dùng sơ đồ hình cây để minh họa, giúp cho việc đếm thuận tiện và không bỏ sót trường hợp.

**Ví dụ 1.**

Một quán phục vụ ăn sáng có bán phở và bún. Phở có 2 loại là phở bò và phở gà. Bún có 3 loại là bún bò, bún riêu và bún cá. Một khách hàng muốn chọn một món để ăn sáng. Vẽ sơ đồ hình cây minh họa và cho biết khách hàng đó có bao nhiêu cách lựa chọn một món ăn sáng.

|  |  |
| --- | --- |
| **Giải:** Ta có sơ đồ hình cây như hình 8.3.  Theo quy tắc cộng, số cách chọn một món ăn sáng là:  (cách). |  |

**Chú ý:** Ta áp dụng quy tắc cộng cho một công việc có nhiều phương án khi các phương án đó phải rời nhau, không phụ thuộc vào nhau (độc lập với nhau).

**Ví dụ 2 2.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Một bộ cờ vua có 32 quân cờ như hình 8.4.  a) Bạn Nam lấy ra tất cả các quân tốt. Hãy đếm xem Nam lấy ra bao nhiêu quân cờ.  b) Bạn Nam lấy ra tất cả các quân cờ trắng và tất cả các quân tốt. Hãy đếm xem Nam lấy ra bao nhiêu quân cờ. |  | | |
| **Giải:**  a) Quân cờ bạn Nam lấy ra có thể thuộc hai loại: màu trắng hoặc màu đen.  - Số quân tốt trắng: 8 quân;  - Số quân tốt đen: 8 quân.  Nam lấy ra:  (quân cờ). | | tốt trắng ……… 8 quân  tốt đen ……….. 8 quân |

b) Nam lấy tất cả các quân trắng và tất cả các quân tốt.

- Đầu tiên ta đếm tất cả các quân trắng, có 16 quân;

- Tiếp theo ta đếm tất cả các quân tốt, có 16 quân tốt.

Vì trong 16 quân tốt có 8 quân tốt trắng đã được đếm nên số quân cờ Nam lấy ra là:

 (quân cờ).

|  |  |
| --- | --- |
| **Nhận xét:** Ở câu b), nếu gọi  là tập hợp gồm tất cả các quân cờ trắng,  là tập hợp gồm tất cả các quân tốt thì các quân cờ Nam lấy ra là các phần tử của tập hợp . Nếu ta áp dụng quy tắc cộng:  (quân cờ), suy ra Nam lấy ra 32 quân cờ. Kết luận khi đó là sai, vì  nên ta không thể áp dụng quy tắc cộng để tính trong trường hợp này. |  |

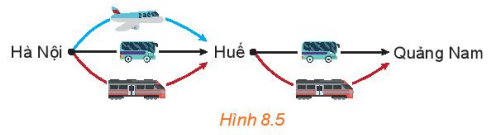
**Luyện tập 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| Có bao nhiêu số tự nhiên từ 1 đến 30 mà không nguyên tố cùng nhau với 35?  **Giải:**  Vì nên trong các số tự nhiên từ 1 đến 30, chỉ có hai số tự nhiên 5 và 7 không nguyên tố cùng nhau với 35. |  |

**2. QUY TẮC NHÂN**

**HĐ3:**

Thầy Trung muốn đi từ Hà Nội vào Huế, rồi từ Huế vào Quảng Nam. Biết rằng từ Hà Nội vào Huế có thể đi bằng 3 cách: ô tô, tàu hỏa hoặc máy bay. Còn từ Huế vào Quảng Nam có thể đi bằng 2 cách: ô tô hoặc tàu hỏa. (H.8.5).



Hỏi thầy Trung có bao nhiêu cách chọn các phương tiện để đi từ Hà Nội vào Quảng Nam?

**Hướng dẫn:** Để đi từ Hà Nội vào Quảng Nam, thầy Trung phải thực hiện 2 hành động:

- Hành động 1: đi từ Hà Nội vào Huế: chọn 1 trong 3 loại phương tiện.

- Hành động 2: đi từ Huế vào Quảng Nam: chọn 1 trong 2 phương tiện.

Vậy có  cách chọn phương tiện để đi từ Hà Nội vào Quảng Nam.

|  |  |
| --- | --- |
| **HĐ4:**  Để lắp ghế vào một phòng chiếu phim, các ghế được gắn nhãn bằng một chữ cái in hoa (trong bảng 26 chữ cái tiếng Anh từ A đến Z) đứng trước và một số nguyên từ 1 đến 20, chẳng hạn X15, Z2,…  Hỏi có thể gắn nhãn tối đa được cho bao nhiêu ghế? |  |

**Hướng dẫn:** Để gắn nhãn cho ghế, người ta phải thực hiện 2 hành động:

- Hành động 1: chọn một trong bảng 26 chữ cái đứng trước.

- Hành động 2: chọn 1 trong 20 số nguyên đứng sau.

Vậy số nhãn có thể gắn cho ghế là:  (nhãn).

Ta nhận thấy muốn làm một việc có hai công đoạn lần lượt thì trước hết ta xét xem công đoạn một có bao nhiêu cách, sau đó với mỗi cách của công đoạn một, ta tính xem công đoạn hai có bao nhiêu cách. Khi đó số cách thực hiện công việc tính theo cách sau:

|  |
| --- |
| Quy tắc nhân  Giả sử một công việc nào đó phải hoàn thành qua hai công đoạn liên tiếp nhau:  - Công đoạn một có  cách thực hiện.  - Với mỗi cách thực hiện công đoạn một, có  cách thực hiện công đoạn hai.  Khi đó số cách thực hiện công việc là:  cách. |

**Chú ý:** Quy tắc nhân áp dụng để tính số cách thực hiện một công việc có nhiều công đoạn, các công đoạn nối tiếp nhau và những công đoạn này độc lập với nhau.

**Ví dụ 3 33.**

|  |  |
| --- | --- |
| Một người muốn mua vé tàu ngồi đi từ Hà Nội vào Vinh. Có ba chuyến tàu là SE5, SE7, SE35. Trên mỗi tàu có 2 loại vé ngồi khác nhau: ngồi cứng hoặc ngồi mềm. Hỏi có bao nhiêu loại vé ngồi khác nhau để người đó lựa chọn?  **Giải:**  Để mua được vé tàu, người đó phải thực hiện hai công đoạn  Chọn chuyến tàu  Chọn loại vé  Có 3 cách chọn chuyến tàu, với mỗi chuyến tàu có 2 cách chọn loại vé ngồi. Áp dụng quy tắc nhân, ta có số cách chọn loại vé là  (cách). |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Chú ý:** Ta cũng có thể dùng quy tắc cộng. Người mua vé có thể lựa chọn một trong ba trường hợp: SE5, SE7 hoặc SE35.  Nếu lựa chọn SE5, có hai loại vé: loại vé SE5 ngồi cứng và SE5 ngồi mềm. Tương tự cho trường hợp SE7 và trường hợp SE35.  Mỗi trường hợp có hai loại vé. Tổng cộng có:  (cách chọn loại vé). |  |

**Luyện tập 2.**

Tại kì World Cup năm 2018, vòng bảng gồm có 32 đội tham gia, được chia vào 8 bảng, mỗi bảng 4 đội thi đấu vòng tròn (mỗi đội chơi một trận với từng đội khác trong cùng bảng). Hỏi tổng cộng vòng bảng có bao nhiêu trận đấu?

**Giải:** Ở mỗi bảng có 4 đội, mỗi đội sẽ phải đấu với 3 đội còn lại. Cứ hai đội đấu với nhau một trận nên số trận đấu ở mỗi bảng là:  (trận).

Số trận đấu ở vòng bảng là:  (trận).

**3. KẾT HỢP QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN**

**Ví dụ 4.**

Để tổ chức một bữa tiệc, người ta chọn thực đơn gồm một món khai vị, một món chính và một món tráng miệng. Nhà hàng đưa ra danh sách: khai vị có 2 loại súp và 3 loại salad; món chính có 4 loại thịt, 3 loại cá và 3 loại tôm; tráng miệng có 5 loại kem và 3 loại bánh. Hỏi có thể thiết kế bao nhiêu thực đơn khác nhau?

**Giải**

Để chọn thực đơn, ta chia làm 3 công đoạn chọn món.

Công đoạn 1, chọn món khai vị có hai phương án là súp hoặc salad nên ta áp dụng quy tắc cộng. Số cách chọn là:  (cách).

Công đoạn 2, chọn món chính: tương tự, ta có số cách chọn là:  (cách).

Công đoạn 3, chọn món tráng miệng: tương tự, ta có số cách chọn là:  (cách).

Tổng kết, theo quy tắc nhân, số cách chọn thực đơn là: (cách).

**Chú ý.** Quy tắc cộng được áp dụng khi công việc được chia thành các phương án phân biệt (thực hiện một trong các phương án để hoàn thành công việc).

Quy tắc nhân được áp dụng khi công việc có nhiều công đoạn nối tiếp nhau (phải thực hiện tất cả các công đoạn để hoàn thành công việc).

**Luyện tập 3.**

Từ các chữ số  có thể lập được bao nhiêu số thỏa mãn:

1. Là số tự nhiên có ba chữ số khác nhau?
2. Là số tự nhiên chẵn có ba chữ số khác nhau?

**Giải**

Gọi số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau là  (  là các chữ số )

1. Chọn chữ số hàng trăm:  có 3 cách ().

Chọn chữ số hàng chục:  có 3 cách ().

Chọn chữ số hàng đơn vị:  có 2 cách ().

Theo quy tắc nhân ta có  cách.

Vậy lập được 18 số tự nhiên có ba chữ số khác nhau từ các chữ số .

1.  là số chẵn nên chữ số hàng đơn vị  có 2 cách chọn là 0 hoặc 2.

Trường hợp 1: Nếu  là  thì chữ số hàng trăm  có 3 cách chọn, chữ số hàng chục  có 2 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có  cách lập.

Trường hợp 2: Nếu  là  thì chữ số hàng trăm  có 2 cách chọn ( khác 0 và 2), chữ số hàng chục  có 2 cách chọn ( khác 0 và )

Theo quy tắc nhân có  cách lập.

Tổng kết, theo quy tắc cộng lập được (số).

**Ví dụ 5.**

Trở lại tình huống mở đầu, ta thấy có hai trường hợp: độ dài của mật khẩu là 2 hoặc 3 kí tự.

Trường hợp 1: độ dài mật khẩu là 2 kí tự. Chọn từng kí tự và áp dụng quy tắc nhân.

Kí tự đầu tiên có 26 cách chọn trong các chữ cái in thường tiếng Anh.

Kí tự thứ hai có 10 cách chọn trong các chữ số từ 0 đến 9.

Vậy, theo quy tắc nhân, ta có  cách chọn mật khẩu trong trường hợp 1.

Trường hợp 2: độ dài mật khẩu là 3 kí tự.

Tương tự như trường hợp 1, ta có  cách chọn mật khẩu.

Vì có hai trường hợp rời nhau, mật khẩu có thể rơi vào một trong hai trường hợp, nên ta áp dụng quy tắc cộng. Tổng số mật khẩu có thể là 

**Vận dụng .**

Khối lớp 10 của một trường trung học phổ thông có ba lớp 10A, 10B, 10C. Lớp 10A có 30 bạn, lớp 10B có 35 bạn, lớp 10C có 32 bạn. Nhà trường muốn chọn 4 bạn để lập đội cờ đỏ của khối sao cho có đủ đại diện các lớp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

**Giải**

Để các lớp đều có đại diện tham gia đội cờ đỏ thì mỗi lớp phải có ít nhất 1 bạn. Như vậy sẽ có hai lớp mỗi lớp 1 bạn và 1 lớp có 2 bạn.

Trường hợp 1: Lớp 10A có 2 bạn, lớp 10B có 1 bạn, lớp 10C có 1 bạn.

Chọn 2 trong 30 bạn của lớp 10A: Chọn bạn thứ nhất có 30 cách, chọn bạn thứ hai có 29 cách nhưng trong đội cờ đỏ không tính đến thứ tự từng người nên có cách.

Chọn 1 trong 35 bạn của lớp 10B: có 35 cách

Chọn 1 trong 32 bạn của lớp 10C: có 32 cách

Theo quy tắc nhân có  cách

Trường hợp 2: Lớp 10B có 2 bạn, lớp 10A có 1 bạn, lớp 10C có 1 bạn.

Lập luận tương tự ta có 

Trường hợp 3: Lớp 10C có 2 bạn, lớp 10A có 1 bạn, lớp 10B có 1 bạn.

Lập luận tương tự ta có  cách

Vậy có cách.

**BÀI TẬP**

**8. 1.**

|  |
| --- |
| Trên giá sách có 8 cuốn truyện ngắn, 7 cuốn tiểu thuyết và 5 tập thơ (tất cả đều khác nhau). Vẽ sơ đồ hình cây minh họa và cho biết bạn Phong có bao nhiêu cách chọn một cuốn để đọc vào ngày cuối tuần. |

**Giải**

Truyện ngắn …… 8 cuốn

Tiểu thuyết ………7 cuốn

Thơ ……….5 tập

Để chọn một cuốn sách đọc vào ngày cuối tuần, bạn Phong thực hiện 1 trong 3 sự lựa chọn sau:

Chọn một cuốn truyện ngắn : Có  cách.

Chọn một cuốn tiểu thuyết : Có  cách.

Chọn một tập thơ : Có  cách.

Theo quy tắc cộng thì bạn Phong có :  cách.

**8.2.**

|  |
| --- |
| Một người gieo đồng xu hai mặt, sau mỗi lần gieo thì ghi lại kết quả sấp hay ngửa. Hỏi nếu người đó gieo ba lần thì có thể có bao nhiêu khả năng xảy ra? |

**Giải**

Lần gieo thứ nhất: Có khả năng xảy ra.

Lần gieo thứ hai: Có khả năng xảy ra.

Lần gieo thứ ba: Có khả năng xảy ra.

Nếu người đó gieo ba lần thì số khả năng xảy ra là: .

**8.3.**

|  |
| --- |
| Ở một loài thực vật, A là gen trội quy định tình trạng hoa kép, a là gen lặn quy định tình trạng hoa đơn.   1. Sự tổ hợp giữa hai gen trên tạo ra mấy kiểu gen? 2. Khi giao phối ngẫu nhiên, có bao nhiêu kiểu giao phối khác nhau từ các kiểu gen đó? |

**Giải**

1. Sự tổ hợp gen A và gen a thành các kiểu gen là: AA, Aa, aa.

Vậy có 3 kiểu gen.

1. Khi giao phối ngẫu nhiên thì có các kiểu giao phối:













Vậy có 6 kiểu giao phối khác nhau.

**8. 4.**

|  |
| --- |
| Có bao nhiêu số tự nhiên   1. có ba chữ số khác nhau? 2. là số lẻ có ba chữ số khác nhau? 3. là số có ba chữ số và chia hết cho 5? 4. là số có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 5? |

**Giải**

1. Gọi số tự nhiên cần tìm là  với  là các chữ số tự nhiên đôi một khác nhau, .

Chọn: Có  cách.

Chọn: Có  cách.

Chọn: Có  cách.

Như vậy có  số tự nhiên có ba chữ số khác nhau.

1. Gọi số tự nhiên cần tìm là  với là các chữ số tự nhiên đôi một khác nhau,  và  lẻ.

Chọn: Có  cách.

Chọn: Có  cách.

Chọn: Có  cách.

Như vậy có  số tự nhiên lẻ có ba chữ số khác nhau.

1. Gọi số tự nhiên cần tìm là  với  là các chữ số tự nhiên  và  .

Chọn: Có  cách.

Chọn: Có  cách.

Chọn: Có  cách.

Như vậy có  số tự nhiên có ba chữ số và chia hết cho.

1. Gọi số tự nhiên cần tìm là  với  là các chữ số tự nhiên đôi một khác nhau  và  .

Trường hợp 1: 

Chọn : Có  cách.

Chọn : Có  cách.

Chọn : Có  cách.

Như vậy có  số thỏa mãn bài toán.

Trường hợp 2: 

Chọn : Có  cách.

Chọn : Có  cách.

Chọn : Có  cách.

Như vậy có  số thỏa mãn bài toán.

Vậy có  số tự nhiên có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

**8.5.**

|  |
| --- |
| a) Mật khẩu của chương trình máy tính quy định gồm 3 kí tự, mỗi kí tự là một chữ số. Hỏi có  thể tạo được bao nhiêu mật khẩu khác nhau?  b) Nếu chương trình máy tính quy định mới mật khẩu vẫn gồm 3 kí tự, nhưng kí tự đầu tiên phải là một chữ cái in hoa trong bảng chữ cái tiếng Anh gồm 26 chữ (từ A đến Z) và 2 kí tự sau là các chữ số (từ 0 đến 9). Hỏi quy định mới có thể tạo được nhiều hơn quy định cũ bao nhiêu mật khẩu khác nhau? |

**Giải**

1. Giả sử mật khẩu của máy tính gồm  ký tự, mỗi ký tự là một chữ số.

Chọn ký tự đầu tiên: Có  cách chọn.

Chọn ký tự thứ hai: Có  cách chọn.

Chọn ký tự thứ ba: Có  cách chọn.

Vậy có thể tạo được  mật khẩu khác nhau thỏa mãn bài toán.

1. Giả sử mật khẩu mới của máy tính gồm  ký tự , ký tự đầu là một chữ cái in hoa, 2 ký tự sau là một chữ số.

Chọn ký tự đầu tiên là một chữ cái in hoa trong bảng chữ cái tiếng Anh gồm  chữ (từ A đến Z): Có  cách chọn.

Chọn ký tự thứ hai là các chữ số (từ  đến ): Có  cách chọn.

Chọn ký tự thứ ba là các chữ số (từ  đến ): Có  cách chọn.

Vậy có thể tạo được  mật khẩu khác nhau thỏa mãn bài toán.

Do đó quy định mới có thể tạo được nhiều hơn quy định cũ số mật khẩu khác nhau là:

 (mật khẩu).