

Trường: THPT Đỗ Đăng Tuyển

Giáo viên soạn: Võ Công Mỹ

Ngày soạn: 26/09/2026

Lớp dạy: 12/1, 12/4

Thời gian thực hiện: Tuần học 4, 5

KẾ HOẠCH BÀI DẠY TÍCH HỢP NĂNG LỰC SỐ (NLS)

CHƯƠNG I: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 3: ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Khối lớp: Toán 12 - Thời lượng: 4 tiết: Tiết 10, 11, 12, 13

I. MỤC TIÊU BÀI DẠY

1. Về kiến thức:

- Nhận biết và phát biểu chính xác định nghĩa đường tiệm cận ngang (TCN), đường tiệm cận đứng (TCD) và đường tiệm cận xiên (TCX) của đồ thị hàm số thông qua điều kiện giới hạn hữu hạn và vô cực.
- Nắm vững các phương pháp tìm tiệm cận xiên $y = ax + b$ ($a \neq 0$) bằng phép chia đa thức tử cho mẫu đối với hàm phân thức hữu tỉ bậc tử lớn hơn bậc mẫu 1 bậc, hoặc bằng công thức giới hạn tổng quát $a = \lim [f(x)/x]$ và $b = \lim [f(x) - ax]$ khi $x \rightarrow \pm\infty$.
- Hiểu sâu sắc ý nghĩa hình học của đường tiệm cận: Khoảng cách từ điểm $M(x; f(x))$ trên đồ thị đến đường tiệm cận tiến dần về 0 khi x ra vô cực hoặc tiến về điểm bất thường x_0 .
- Vận dụng đường tiệm cận để giải quyết các bài toán thực tiễn: Khảo sát nồng độ thuốc trong máu sau khi tiêm $C(t)$, mô hình chi phí sản xuất trung bình $f(x) = C(x)/x$, chi phí xử lý môi trường loại bỏ tảo độc.

2. Về năng lực:

a) Năng lực chung:

- **Tự chủ và tự học:** Tự chủ và tự học: Chủ động đọc SGK, quan sát hiện tượng bão hòa thực tế; tự giác thực hành trên GeoGebra để phát hiện tính chất hình học.
- **Giao tiếp và hợp tác:** Giao tiếp và hợp tác: Thảo luận nhóm hiệu quả trên không gian số (Google Classroom/Padlet), trao đổi cách nhận diện tiệm cận qua bảng biến thiên và phản biện quan niệm sai lầm về tiệm cận.
- **Giải quyết vấn đề và sáng tạo:** Giải quyết vấn đề và sáng tạo: Biết quy đổi bài toán đồ thị tiệm cận sang bài toán tính giới hạn giải tích; biết phản biện với AI để làm rõ các trường hợp suy biến.

b) Năng lực đặc thù môn Toán:

- **Tư duy và lập luận toán học:** Tư duy và lập luận toán học: Chuyển đổi linh hoạt giữa ngôn ngữ giới hạn giải tích và biểu diễn hình học trực quan trên hệ trục tọa độ; phân biệt rõ điểm gián đoạn khử được (lỗ thủng) với tiệm cận đứng.
- **Mô hình hóa toán học:** Mô hình hóa toán học: Chuyển đổi các bài toán thực tế (chi phí trung bình, nồng độ thuốc $C(t)$) sang mô hình tiệm cận ngang $y = 0$, $y = 2$ để giải thích hiện tượng bão hòa hoặc đào thải thuốc.
- **Giải quyết vấn đề toán học:** Giải quyết vấn đề toán học: Thực hiện chính xác các phép tính giới hạn một bên ($x \rightarrow x_0^\pm$), giới hạn vô cực ($x \rightarrow \pm\infty$) và phép chia đa thức tìm tiệm cận xiên.

- **Sử dụng công cụ, phương tiện học toán:** Sử dụng công cụ, phương tiện học toán: Sử dụng máy tính cầm tay Casio bấm phím CALC để dự đoán giới hạn và dùng phần mềm GeoGebra vẽ đồ thị, hiển thị đường tiệm cận.

c) **Năng lực số (NLS) tích hợp chuyên sâu (Theo Phụ lục 3):**

- **2.1.NC1a:** Sử dụng phần mềm GeoGebra Classic nhập hàm số $f(x)$, dùng lệnh Asymptote(f) vẽ đồng thời đồ thị và các đường tiệm cận, tạo điểm động $M(t, f(t))$ và hình chiếu H để quan sát trực quan đoạn khoảng cách MH tiến về 0 khi $x \rightarrow \pm\infty$ hoặc $x \rightarrow x_0$.
- **1.1.NC1b:** Sử dụng máy tính cầm tay Casio nhập hàm số và dùng tính năng CALC với $x = 10^9$ (cho $+\infty$) hoặc $x = x_0 + 10^{-6}$ (cho giới hạn một bên) để kiểm tra nhanh kết quả tính tiệm cận.
- **5.1.NC1a:** Tương tác bằng giọng nói (Voice) hoặc câu lệnh prompt với Trợ lý AI (ChatGPT) tranh luận câu hỏi học sinh giỏi: 'Đường thẳng $y = ax + b$ có nhận chính nó làm tiệm cận xiên không?'; kiểm thử và phản biện lại câu trả lời của AI.

3. Về phẩm chất:

- **Chăm chỉ & Cẩn thận:** Chăm chỉ & Cẩn thận: Rèn luyện tính cẩn thận, tỉ mỉ khi chia đa thức và bấm máy tính kiểm tra giới hạn.
- **Trung thực:** Trung thực: Khách quan, trung thực trong việc báo cáo kết quả và tôn trọng bằng chứng kiểm chứng toán học.
- **Trách nhiệm:** Trách nhiệm: Có ý thức ứng dụng toán học để phân tích các quy luật tiệm cận trong đời sống, không sao chép máy móc kết quả AI.

II. THIẾT BỊ DẠY HỌC VÀ HỌC LIỆU

1. **Giáo viên:** Kế hoạch bài dạy chuẩn CV 5512, slide bài giảng PowerPoint/Canva tương tác, Tivi/Máy chiếu tương tác, máy tính kết nối Internet.

+ **Học liệu số:** File GeoGebra mẫu mô phỏng $f(x) = (2x+1)/(x-4)$, $f(x) = \sin(x)/x$, hàm phân thức bậc 2 trên bậc 1; Link Wikipedia tra cứu tiệm cận; Đề trắc nghiệm Quizizz; Phiếu học tập số.

+ **Nền tảng số:** GeoGebra Classic (online/offline), Wikipedia, ChatGPT Voice, hệ thống Quizizz.

2. **Học sinh:** Sách giáo khoa Toán 12 (KNTT Tập 1), vở ghi bài, máy tính cầm tay khoa học (Casio fx-580VN X / fx-880BTG).

+ **Thiết bị số:** Điện thoại thông minh/Máy tính bảng/Laptop (theo nhóm) để thao tác GeoGebra, tra cứu Wikipedia và tương tác thoại AI.

III. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC

TIẾT 1: ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG VÀ ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

HOẠT ĐỘNG 1: MỞ ĐẦU / KHỞI ĐỘNG

a) **Mục tiêu:** Tạo mâu thuẫn nhận thức về quan niệm sai lầm phổ biến 'đồ thị không bao giờ cắt tiệm cận'; Khảo sát nhanh trên Google Forms và trực quan hóa bằng GeoGebra (Phát triển NLS 1.2.NC1a, 2.1.NC1a).

b) **Nội dung:** Quan sát câu hỏi: 'Nếu một đồ thị cắt một đường thẳng vô số lần thì đường thẳng ấy còn có thể là tiệm cận không?'. Khảo sát đồ thị $f(x) = (\sin x)/x$ và đường thẳng $y = 0$ trên GeoGebra.

c) **Sản phẩm:** Dự đoán của học sinh và kết luận điều chỉnh: Đồ thị hoàn toàn CÓ THỂ CẮT TIỆM CẬN; bản chất của tiệm cận là khoảng cách tiến về 0 khi x ra vô cực.

d) **Tổ chức thực hiện:** Quy trình tổ chức 4 bước:

HOẠT ĐỘNG CỦA GV VÀ HS	DỰ KIẾN SẢN PHẨM / GHI BẢNG
------------------------	-----------------------------

Bước 1: Chuyển giao nhiệm vụ - GV chiếu câu hỏi khảo sát kèm mã QR Google Forms mini: 'Nếu một đồ thị cắt một đường thẳng thì đường thẳng ấy có thể là đường tiệm cận của đồ thị không?' - Yêu cầu HS chọn Có hoặc Không và nêu ngắn gọn 1 lí do. - Chiếu mô hình GeoGebra hàm số $f(x) = (\sin x)/x$ và đường thẳng $g(x) = 0$. [Tích hợp NLS 1.2.NC1a, 2.1.NC1a]	1. Khởi động: Phá vỡ quan niệm sai lầm về tiệm cận: - Quan niệm sai lầm thường gặp: 'Tiệm cận là đường thẳng mà đồ thị không bao giờ chạm vào'. - Khảo sát hàm số $f(x) = (\sin x) / x$: + Đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành $y = 0$ tại vô số điểm $x = k\pi$ ($k \neq 0$). + Nhưng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$, khoảng cách $f(x) - 0 = \sin x / x \leq 1/ x \rightarrow 0$. => Đường thẳng $y = 0$ VẪN LÀ TIỆM CẬN NGANG! => <i>BẢN CHẤT TIỆM CẬN: Dựa vào hành vi giới hạn (khoảng cách tiến về 0), KHÔNG PHỤ THUỘC vào việc có cắt nhau hay không.</i>
Bước 2: Thực hiện nhiệm vụ - HS quét mã QR trả lời Form. - Quan sát GV thao tác trên GeoGebra: Phóng to thu nhỏ tỉ lệ trục để thấy đường cong lượn sóng cắt trục Ox liên tục nhưng biên độ tắt dần sát vào trục Ox.	Phản hồi của HS: Bất ngờ khi thấy đồ thị cắt trục hoành vô số lần mà trục hoành vẫn là tiệm cận ngang.
Bước 3: Báo cáo, thảo luận - GV gọi 1 HS giải thích: Khoảng cách giữa điểm M trên đường cong và đường thẳng $y = 0$ thay đổi ra sao khi x ngày càng lớn?	HS nhận xét: Khoảng cách bóp nghẹt về 0 khi x ra vô cực.
Bước 4: Kết luận, nhận định - GV chốt nguyên tắc sự phạm: Định nghĩa tiệm cận dựa trên điều kiện GIỚI HẠN, dẫn dắt vào bài mới.	GV ghi tựa bài mới: Bài 3. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

HOẠT ĐỘNG 2: HÌNH THÀNH KIẾN THỨC MỚI (TIỆM CẬN NGANG & ĐỨNG)

2.1. Đường tiệm cận ngang (TCN)

a) Mục tiêu: Hiểu vững định nghĩa đường tiệm cận ngang qua giới hạn vô cực; Đo khoảng cách MH trên GeoGebra; Dùng máy tính Casio phím CALC tính giới hạn; Giải Ví dụ 1, Ví dụ 2 và Luyện tập 1 SGK tr.20-21 (Phát triển NLS 2.1.NC1a, 1.1.NC1b).

b) Nội dung: Khám phá HĐ1 (Hàm số $y = (2x + 1)/x$), hình thành Định nghĩa TCN, giải Ví dụ 1, Ví dụ 2 và bài toán thực tế phân rã chất phóng xạ Vận dụng 1.

c) Sản phẩm: Định nghĩa chuẩn TCN; Tập GeoGebra điểm động MH; Lời giải chi tiết Ví dụ 1, 2 và Vận dụng 1.

d) Tổ chức thực hiện: Tổ chức thực hiện:

HOẠT ĐỘNG CỦA GV VÀ HS	DỰ KIẾN SẢN PHẨM / GHI BẢNG
Bước 1: Chuyển giao nhiệm vụ - GV tổ chức HĐ1 (SGK tr.20): Cho $y = f(x) = (2x + 1)/x$ có đồ thị (C). $M(x; f(x))$ thuộc (C), H là hình chiếu của M lên đường thẳng $y = 2$. a) Tính độ dài đoạn MH. ($MH = f(x) - 2 = (2x + 1)/x - 2 = 1/x$ với $x > 0$). b) Nhận xét độ dài MH khi $x \rightarrow +\infty$. ($MH \rightarrow 0$). - Chuẩn hóa Định nghĩa Tiệm cận ngang (SGK tr.20): Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$. - Trình chiếu GeoGebra: Dựng $M(t, f(t))$, $H(t, 2)$, đoạn $MH = \text{Segment}(M, H)$, kéo thanh trượt t tăng từ 1 đến 50. - Hướng dẫn kỹ thuật Casio: Bấm 'CALC' 'x = 10^9'. - Giao nhiệm vụ làm Ví dụ 1, Ví dụ 2 và Vận dụng 1. [Tích hợp NLS 2.1.NC1a, 1.1.NC1b]	1. Đường tiệm cận ngang Định nghĩa: Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ khi $x \rightarrow -\infty$ Ví dụ 1 (SGK tr.20) Tìm TCN của $y = (3x - 2)/(x + 1)$: Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [(3x - 2)/(x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [(3 - 2/x)/(1 + 1/x)] = 3$. $\Rightarrow$ Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị. Ví dụ 2 (SGK tr.21) - Hàm chứa căn thức $y = \sqrt{x^2 + 1}/x$: - Khi $x \rightarrow +\infty$: $\lim y = \lim [x\sqrt{1 + 1/x^2}]/x = 1 \Rightarrow$ TCN: $y = 1$. - Khi $x \rightarrow -\infty$: $\lim y = \lim [-x\sqrt{1 + 1/x^2}]/x = -1 \Rightarrow$ TCN: $y = -1$. $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$. Vận dụng 1 (Phóng xạ): $m(t) = 15 \cdot e^{-(0,012t)}$ (gam) - Khi $t \rightarrow +\infty$: $\lim m(t) = \lim [15/e^{(0,012t)}] = 0$. $\Rightarrow$ Đồ thị có TCN $y = 0$. Ý nghĩa: Khối lượng chất phóng xạ tiêu biến dần về 0.
Bước 2: Thực hiện nhiệm vụ - HS ghi định nghĩa vào vở và giải chi tiết Ví dụ 1, 2. - Thao tác trên Casio fx-580VN X: Nhập '$\sqrt{(x^2 + 1)/x}$', bấm 'CALC' '10^9' ra '1'; bấm 'CALC' '-10^9' ra '-1' $\Rightarrow$ Khớp 2 tiệm cận ngang $y = \pm 1$. [Tích hợp NLS 1.1.NC1b]	Kiểm chứng bằng máy tính Casio: Kỹ thuật CALC với số cực lớn (10^9 và -10^9) giúp xác định ngay lập tức số lượng và phương trình các đường tiệm cận ngang.
Bước 3: Báo cáo, thảo luận - Đại diện 2 HS lên bảng trình bày Ví dụ 1 và 2. - GV lưu ý: Hàm phân thức hữu tỉ có bậc tử = bậc mẫu thì TCN $y = a/b$; hàm có căn thức bậc hai có thể có 2 tiệm cận ngang khác nhau.	HS ghi nhớ: Cần xét giới hạn ở cả hai phía $+\infty$ và $-\infty$.
Bước 4: Kết luận, nhận định - GV chuẩn hóa định nghĩa tiệm cận ngang.	GV chốt kiến thức mục 1.

2.2. Đường tiệm cận đứng (TCD)

a) Mục tiêu: Nắm vững định nghĩa tiệm cận đứng bằng giới hạn một phía; Phân biệt tiệm cận đứng với điểm gián đoạn khử được (lỗ thủng đồ thị); Giải Ví dụ 3, 4 và Vận dụng 2 SGK tr.21-22 (Phát triển NLS 2.1.NC1a, 1.1.NC1b).

b) Nội dung: Khám phá HĐ2 (Hàm số $y = x/(x - 1)$), hình thành Định nghĩa TCD, giải Ví dụ 3, 4, bài toán chi phí xử lý tảo độc Vận dụng 2 và phân tích bảy nghiệm mẫu.

c) Sản phẩm: Định nghĩa chuẩn TCD; Nhận diện bảy lỗ thủng đồ thị; Lời giải chi tiết Ví dụ 3, 4 và Vận dụng 2.

d) Tổ chức thực hiện: Tổ chức thực hiện:

HOẠT ĐỘNG CỦA GV VÀ HS	DỰ KIẾN SẢN PHẨM / GHI BẢNG
Bước 1: Chuyển giao nhiệm vụ - GV tổ chức HĐ2 (SGK tr.21): Cho $y = f(x) = x/(x - 1)$. Với $x > 1$, xét $M(x; f(x))$, H là hình chiếu của M lên đường thẳng $x = 1$. Khi khoảng cách MH $\rightarrow 0$ thì tung độ y của M tiến về đâu? ($y \rightarrow +\infty$). - Chuẩn hóa Định nghĩa Tiệm cận đứng (SGK tr.22): Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các giới hạn một phía tại x_0 bằng $+\infty$ hoặc $-\infty$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ khi $x \rightarrow x_0^+$ hoặc $x \rightarrow x_0^-$). - Cảnh báo bảy nghiệm mẫu (Bài 2 SGK): $y = (x^2 + 2x - 3)/(x - 1)$. Mẫu có nghiệm $x = 1$ nhưng tử số cũng triệt tiêu tại $x = 1$. Hàm rút gọn thành $y = x + 3$ với $x \neq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} y$ bằng 4 (hữu hạn) $\Rightarrow x = 1$ KHÔNG PHẢI là tiệm cận đứng! - Giao nhiệm vụ làm Ví dụ 3, 4 và Vận dụng 2 (Chi phí loại bỏ tảo độc). [Tích hợp NLS 2.1.NC1a, 1.1.NC1b]	2. Đường tiệm cận đứng Định nghĩa Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) khi $x \rightarrow x_0^+$ hoặc $x \rightarrow x_0^-$ Phân biệt Tiệm cận đứng với Điểm gián đoạn khử được: - Xét $y = (x^2 + 2x - 3)/(x - 1) = (x - 1)(x + 3)/(x - 1) = x + 3$ ($x \neq 1$). - $\lim_{x \rightarrow 1} y$ khi $x \rightarrow 1 = 4 \Rightarrow$ Đồ thị là đường thẳng bị 'thủng' tại điểm (1; 4), KHÔNG CÓ TCD. Ví dụ 3 (SGK tr.22) - Tìm TCD của $y = (3 - x)/(x + 2)$ - Mẫu số có nghiệm $x = -2$ (không triệt tiêu tử số vì $3 - (-2) = 5 \neq 0$). - $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$. $\Rightarrow$ Đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị. Vận dụng 2 - Chi phí loại bỏ p% tảo độc: $C(p) = 45p / (100 - p)$ (triệu đồng) - Khi $p \rightarrow 100^-$: $\lim_{p \rightarrow 100^-} C(p) = +\infty \Rightarrow$ TCD: $p = 100$. $\Rightarrow$ Ý nghĩa thực tế: Để loại bỏ hoàn toàn 100% tảo độc thì chi phí sẽ tăng vô hạn (không khả thi về mặt ngân sách thực tế).
Bước 2: Thực hiện nhiệm vụ - HS ghi chép định nghĩa, vẽ hình phác họa điểm thủng và giải bài tập vào vở. - Thao tác trên GeoGebra: Nhập hàm $(x^2$	Phát hiện trên GeoGebra: GeoGebra phản ánh trung thực bản chất toán học: Đồ thị không bẻ cong vô cực tại $x = 1$ mà đi thẳng qua điểm thủng (1; 4).

$+ 2x - 3)/(x - 1)$, phóng to quanh điểm $x = 1$ để thấy đồ thị là đường thẳng có lỗ thủng, lệnh 'Asymptote' không sinh ra tiệm cận $x = 1$. [Tích hợp NLS 2.1.NC1a]	
Bước 3: Báo cáo, thảo luận - Đại diện 1 HS lên bảng trình bày Ví dụ 3 và nêu ý nghĩa bài toán tảo độc. - Cả lớp ghi nhớ: Nghiệm của mẫu số KHÔNG ĐỒNG THỜI là nghiệm của tử số mới là tiệm cận đứng.	HS nắm vững tiêu chí kiểm tra tiệm cận đứng.
Bước 4: Kết luận, nhận định - GV chuẩn hóa định nghĩa tiệm cận đứng.	GV chốt kiến thức Tiết 1.

TIẾT 2 & 3: ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

HOẠT ĐỘNG 2 (Tiếp theo): HÌNH THÀNH KIẾN THỨC MỚI

2.3. Đường tiệm cận xiên (TCX) & Quy trình xác định

a) Mục tiêu: Nắm vững định nghĩa tiệm cận xiên $y = ax + b$ ($a \neq 0$); Thành thạo phương pháp chia đa thức (Cách 1) và công thức tính giới hạn a, b (Cách 2); Trục quan hóa hàm hiệu $h(x) = f(x) - g(x)$ trên GeoGebra; Giải Ví dụ 5, 6 và Luyện tập 3 SGK tr.23-24 (Phát triển NLS 2.1.NC1a, 1.1.NC1b).

b) Nội dung: Khám phá HĐ3 (Hàm số $y = x - 1 + 2/(x + 1)$), hình thành Định nghĩa TCX, 2 cách xác định tiệm cận xiên và giải Ví dụ 5, 6, Luyện tập 3.

c) Sản phẩm: Định nghĩa TCX; Bảng 2 cách tìm tiệm cận xiên; Lời giải chi tiết Ví dụ 5, 6 và Luyện tập 3.

d) Tổ chức thực hiện: Tổ chức thực hiện:

HOẠT ĐỘNG CỦA GV VÀ HS	DỰ KIẾN SẢN PHẨM / GHI BẢNG
Bước 1: Chuyển giao nhiệm vụ - GV tổ chức HĐ3 (SGK tr.23): Cho $y = f(x) = x - 1 + 2/(x + 1)$ và đường thẳng $y = x - 1$. Xét M thuộc đồ thị, H là hình chiếu của M lên đường thẳng $y = x - 1$. + Khi $x \rightarrow +\infty$, $\lim [f(x) - (x - 1)] = \lim [2/(x + 1)] = 0$. + Nhận xét: Khoảng cách từ điểm M trên đường cong đến đường xiên $y = x - 1$ tiến về 0. - Chuẩn hóa Định nghĩa Tiệm cận xiên: Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là tiệm cận xiên của đồ thị $y = f(x)$ nếu $\lim [f(x) - (ax + b)] = 0$ khi $x \rightarrow +\infty$ (hoặc $x \rightarrow -\infty$). - Giới thiệu 2 cách xác định tiệm cận xiên:	3. Đường tiệm cận xiên Định nghĩa Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) được gọi là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim [f(x) - (ax + b)] = 0$ (khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$) Hai cách xác định tiệm cận xiên: + CÁCH 1 (Chia đa thức cho hàm phân thức $P(x)/Q(x)$ với bậc tử = bậc mẫu + 1): Thực hiện phép chia: $f(x) = (ax + b) + r / Q(x)$ $\Rightarrow$ TCX là: $y = ax + b$ + CÁCH 2 (Dùng công thức giới hạn tổng quát): $a = \lim [f(x) / x]$ (với $a \neq 0$) $b = \lim [f(x) - ax]$

+ Cách 1 (Chia đa thức - Ưu tiên hàm phân thức bậc 2 trên bậc 1): $f(x) = ax + b + r(x)/q(x) \Rightarrow$ TCX: $y = ax + b$. + Cách 2 (Công thức giới hạn - Dùng cho hàm căn thức): $a = \lim [f(x)/x]$ khi $x \rightarrow \pm\infty$; $b = \lim [f(x) - ax]$ khi $x \rightarrow \pm\infty$. - Trình chiếu mô hình GeoGebra: Vẽ $f(x)$, $g(x) = x - 1$ và đồ thị hàm hiệu $h(x) = f(x) - g(x)$ tiến sát về 0. [Tích hợp NLS 2.1.NC1a]	Ví dụ 6 (SGK tr.24) - Tìm TCX của $y = (x^2 - x + 2) / (x + 1)$: - Chia tử cho mẫu: $x^2 - x + 2 = (x - 2)(x + 1) + 4$. - Viết lại: $y = x - 2 + 4 / (x + 1)$. - Vì $\lim [y - (x - 2)] = \lim [4 / (x + 1)] = 0$ khi $x \rightarrow \pm\infty$. $\Rightarrow$ Đường thẳng $y = x - 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
Bước 2: Thực hiện nhiệm vụ - HS thực hiện phép chia đa thức ra nháp và ghi lời giải vào vở. - Thao tác trên GeoGebra: Nhập '$f(x) = (x^2 - x + 2)/(x + 1)$', gõ lệnh '$\text{Asymptote}(f)$' $\Rightarrow$ GeoGebra xuất đồng thời TCD: $x = -1$ và TCX: $y = x - 2$. - Nhập hàm hiệu '$h(x) = f(x) - (x - 2)$' và xem giá trị $h(10) = 4/11$; $h(100) = 4/101$ tiến về 0. [Tích hợp NLS 2.1.NC1a, 1.1.NC1b]	Mô phỏng chính xác quy trình GeoGebra: Đồ thị đường cong $f(x)$ bị kẹp giữa đường tiệm cận đứng $x = -1$ và đường tiệm cận xiên $y = x - 2$, khi ra xa gốc tọa độ đường cong dần sát vào đường xiên.
Bước 3: Báo cáo, thảo luận - Đại diện 1 HS lên bảng trình bày Luyện tập 3: $y = (x^2 - 4x + 2)/(1 - x) = -x + 3 - 1/(1 - x) \Rightarrow$ TCX: $y = -x + 3$; TCD: $x = 1$.	HS thành thạo kỹ năng chia đa thức có hệ số âm ở mẫu.
Bước 4: Kết luận, nhận định - GV chuẩn hóa điều kiện có tiệm cận xiên: Bậc tử = Bậc mẫu + 1.	GV chốt kiến thức Tiết 2 & 3.

TIẾT 4: LUYỆN TẬP TỔNG HỢP, MỞ RỘNG WIKIPEDIA & TRANH LUẬN VỚI AI HOẠT ĐỘNG 3: LUYỆN TẬP GIẢI BÀI TẬP SGK THEO TRẠM (20 phút)

a) Mục tiêu: Củng cố phân loại tiệm cận qua đồ thị bảng biến thiên (Bài 1.15), tính toán tiệm cận phân thức và căn thức (Bài 1.16, 1.17), bài toán thực tế nồng độ thuốc và chi phí trung bình (Bài 1.18, Bài 4 SGK) (Phát triển NLS 1.2.NC1a, 1.1.NC1b).

b) Nội dung: Tổ chức 3 trạm học tập giải quyết các bài tập SGK trang 24-25.

c) Sản phẩm: Lời giải hoàn chỉnh các bài toán trong phiếu học tập nhóm.

d) Tổ chức thực hiện: Tổ chức thực hiện:

HOẠT ĐỘNG CỦA GV VÀ HS	DỰ KIẾN SẢN PHẨM / GHI BẢNG
TỔ CHỨC 3 TRẠM BÀI TẬP TRỌNG	LỜI GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP SGK

TÂM SGK TR.24-25 - GV chia lớp thành các nhóm luân chuyển 3 trạm: + Trạm 1 (Độc đồ thị - Bài 1.15): Dựa vào đồ thị Hình 1.25, chỉ ra phương trình các đường tiệm cận đứng, ngang, xiên. + Trạm 2 (Hàm căn thức - Bài 1.17): Tìm tiệm cận xiên của $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ bằng công thức giới hạn a, b. + Trạm 3 (Mô hình kinh tế - Bài 4 SGK): Chi phí trung bình $f(x) = (2x + 50)/x$. Chứng minh $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ khi $x \rightarrow +\infty$ và nêu ý nghĩa kinh tế. - HS đối chiếu kết quả bằng máy tính Casio và GeoGebra. [Tích hợp NLS 1.1.NC1b]	TRANG 24-25: Bài 1.15: Độc đồ thị: - a) Đồ thị có TCD: $x = 1$; TCN: $y = 1$. - b) Đồ thị có TCD: $x = -1$; TCX: $y = x + 1$. Bài 1.17: $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ (TXĐ: $D = R \Rightarrow$ Không có TCD): - Khi $x \rightarrow +\infty$: $a = \lim [y/x] = 1$; $b = \lim [\sqrt{x^2 + x + 1} - x] = \lim [(x + 1)/(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)] = 1/2$. $\Rightarrow$ TCX bên phải: $y = x + 1/2$. - Khi $x \rightarrow -\infty$: $a = \lim [y/x] = -1$; $b = \lim [\sqrt{x^2 + x + 1} + x] = -1/2$. $\Rightarrow$ TCX bên trái: $y = -x - 1/2$. Bài 4 (Kinh tế) - Chi phí trung bình $f(x) = (2x + 50)/x$ (triệu đồng): - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim [2 + 50/x] = 2$. $\Rightarrow$ TCN: $y = 2$. Ý nghĩa: Khi quy mô sản xuất càng lớn (x rất lớn), chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm sẽ giảm dần và tiệm cận về 2 triệu đồng (không thể thấp hơn 2 triệu).
---	--

HOẠT ĐỘNG 4: MỞ RỘNG TRI THỨC SỐ – TRA CỨU WIKIPEDIA VỀ TIỆM CẬN CONG (12 phút)

- a) Mục tiêu:** Mở rộng khái niệm tiệm cận ngoài SGK; Rèn luyện kỹ năng tìm kiếm, đọc chọn lọc, đánh giá nguồn và trích dẫn thông tin từ Wikipedia (Phát triển NLS 3.1.NC1a, 4.1.NC1a).
- b) Nội dung:** Truy cập mục 'Curvilinear asymptotes' trên Wikipedia (<https://en.wikipedia.org/wiki/Asymptote>), tìm hiểu khái niệm tiệm cận cong và lập Thẻ tri thức số.
- c) Sản phẩm:** Thẻ tri thức số (120-150 từ) gồm định nghĩa tiệm cận cong, ví dụ $F(x) = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)/x$ có tiệm cận parabol $y = x^2 + 2x + 3$ và liên kết nguồn.
- d) Tổ chức thực hiện:** Hướng dẫn thực hiện:

HOẠT ĐỘNG CỦA GV VÀ HS	DỰ KIẾN SẢN PHẨM / GHI BẢNG
Bước 1: Chuyển giao nhiệm vụ - GV cung cấp link tra cứu Wikipedia tiếng Anh về Asymptote: https://en.wikipedia.org/wiki/Asymptote - Yêu cầu các nhóm tìm mục 'Curvilinear asymptotes' (Tiệm cận cong) và trả lời: 1) Định nghĩa tiệm cận cong là gì? (Khoảng cách giữa hai đường cong tiến về 0 khi x ra vô cực). 2) Lấy ví dụ minh họa bằng phép chia đa thức: $F(x) = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)/x = x^2 + 2x + 3 + 4/x$.	THẺ TRI THỨC SỐ (MỞ RỘNG): TIỆM CẬN CONG (PARABOLIC ASYMPTOTE) 1. Khái niệm mở rộng: - Tiệm cận cong của đồ thị $y = f(x)$ là một đường cong $y = g(x)$ sao cho khoảng cách giữa $f(x)$ và $g(x)$ tiến dần về 0 khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$: $\lim [f(x) - g(x)] = 0$. 2. Ví dụ đại số kiểm chứng: - Xét hàm số: $F(x) = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)/x = (x^2 + 2x + 3) + 4/x$. - Khi $x \rightarrow \pm\infty$: $\lim [F(x) - (x^2 + 2x + 3)] = \lim$

3) Phân biệt: Tiệm cận cong là kiến thức mở rộng đại học/quốc tế, SGK lớp 12 chỉ học tiệm cận đường thẳng. - Nhắc nhở: Đánh giá độ tin cậy của trang Wikipedia, ghi rõ ngày truy cập và nguồn trích dẫn. [Tích hợp NLS 3.1.NC1a, 4.1.NC1a]	$[4/x] = 0$. $\Rightarrow$ Parabol $y = x^2 + 2x + 3$ được gọi là tiệm cận cong (tiệm cận parabol) của đồ thị hàm số $F(x)$. 3. Ghi chú sự phạm & Nguồn trích dẫn: - Phân biệt chuẩn mực: Trong chương trình GDPT 2018 Toán 12, ta chỉ xét tiệm cận là ĐƯỜNG THẲNG. - Nguồn tham khảo: Wikipedia contributors, 'Asymptote', Wikipedia, The Free Encyclopedia (truy cập ngày 03/09/2026).
Bước 2: Thực hiện nhiệm vụ - Các nhóm dùng điện thoại/laptop tra cứu link, đọc dịch và tóm tắt vào Thẻ tri thức số trên Canva/Google Docs. - Áp dụng Bộ lọc đánh giá nguồn: Kiểm tra tài liệu tham khảo cuối trang Wikipedia.	Sản phẩm Thẻ tri thức của học sinh thể hiện năng lực tự nghiên cứu tài liệu toán học quốc tế có kiểm chứng.
Bước 3: Báo cáo, thảo luận - Đại diện nhóm trình bày Thẻ tri thức số và nêu bài học về đạo đức trích dẫn nguồn học liệu mở.	HS rèn luyện tư duy phản biện và trách nhiệm tôn trọng bản quyền số.
Bước 4: Kết luận, nhận định - GV đánh giá kỹ năng khai thác thông tin số và chuyển sang hoạt động AI.	Khen ngợi tinh thần học thuật mở rộng.

HOẠT ĐỘNG 5: PHÂN HÓA HỌC SINH GIỎI – ĐỐI THOẠI & TRANH LUẬN VỚI AI BẰNG GIỌNG NÓI (13 phút trên lớp + Hoàn thiện ngoài giờ)

- a) Mục tiêu:** Đào sâu vai trò của định nghĩa, quy ước và trường hợp suy biến; Rèn luyện năng lực tương tác thoại và phản biện câu trả lời của AI (Phát triển NLS 5.1.NC1a, 4.1.NC1a).
- b) Nội dung:** Tranh luận câu hỏi học sinh giỏi: 'Đồ thị hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$) có nhận chính nó làm đường tiệm cận xiên của nó không?'. Sử dụng ChatGPT Voice đặt câu hỏi và phản biện.
- c) Sản phẩm:** Bản đồ lập luận hai phía (Khẳng định vs Phản biện quy ước) và đoạn kết luận ghi âm/văn bản 90 giây có viện dẫn định nghĩa SGK.
- d) Tổ chức thực hiện:** Hướng dẫn thực hiện:

HOẠT ĐỘNG CỦA GV VÀ HS	DỰ KIẾN SẢN PHẨM / GHI BẢNG
Bước 1: Giao nhiệm vụ Tranh luận AI - GV nêu câu hỏi học thuật phân hóa: 'Đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) có nhận	NỘI DUNG TRANH LUẬN HỌC THUẬT & KỊCH BẢN VOICE CHATGPT:

chính đường thẳng $y = ax + b$ làm tiệm cận xiên của nó không? - Phân công 3 nhóm vai: + Nhóm 1 (Khẳng định): Dựa vào định nghĩa giới hạn $\lim [f(x) - (ax + b)] = \lim 0 = 0$ với mọi x, thỏa mãn công thức tuyệt đối. + Nhóm 2 (Phản biện quy ước): Khảo sát thuật ngữ hình học, tiệm cận là đường bám sát mà đường cong tiến tới, nếu trùng nhau là trường hợp suy biến tầm thường (trivial case), nhiều giáo trình quy ước tiệm cận phải là đối tượng phân biệt. + Nhóm 3 (Trọng tài công nghệ): Dùng tính năng ChatGPT Voice hỏi trực tiếp AI theo kịch bản 4 bước. - Nhắc nhở an toàn số: Không nói thông tin cá nhân, trường lớp trong đoạn ghi âm thoại AI. [Tích hợp NLS 5.1.NC1a, 4.1.NC1a]	1. Kịch bản câu hỏi thoại với AI (ChatGPT Voice): Câu 1: 'Theo đúng định nghĩa giới hạn trong sách giáo khoa Toán 12, đường thẳng $y = ax + b$ có thỏa mãn điều kiện tiệm cận xiên của hàm số $f(x) = ax + b$ không? Nêu rõ giả định bạn dùng'. Câu 2: 'Nếu hiệu $f(x) - (ax + b)$ bằng 0 với mọi x thì giới hạn ở vô cực có bằng 0 không?'. Câu 3: 'Trong toán học giải tích nâng cao, có quy ước loại trừ trường hợp đường cong trùng với tiệm cận không? Đó là định nghĩa hay quy ước sự phạm?'. 2. Kết luận chuẩn mực của Bản đồ lập luận: - Về mặt hình thức giải tích: Theo công thức định nghĩa nguyên văn SGK $\lim [f(x) - (ax + b)] = 0$, hàm số $y = ax + b$ thỏa mãn điều kiện một cách tầm thường ($0 = 0$). - Về mặt quy ước bản chất hình học: Khái niệm tiệm cận sinh ra để mô tả hình vi của đường cong tiến sát một đường thẳng khác nó. Vì vậy trong sự phạm phổ thông thường ngầm hiểu đường tiệm cận là đối tượng phân biệt với đồ thị hàm số. => <i>Bài học: Cần công bố rõ quy ước trước khi đưa ra kết luận.</i>
Bước 2: Thực hiện nhiệm vụ - Nhóm 3 bật tính năng ChatGPT Voice trên điện thoại, bật loa ngoài đối thoại theo kịch bản. - Nhóm 1 và 2 lắng nghe, ghi chép luận điểm AI trả lời để phản biện: AI có bị mâu thuẫn giữa câu 1 và câu 3 không?	Sản phẩm đối thoại AI: Học sinh nhận thấy AI lúc đầu khẳng định 'không thể trùng', nhưng khi bị truy vấn công thức giới hạn thì AI thừa nhận 'về mặt giải tích thuần túy thỏa mãn giới hạn bằng 0'.
Bước 3: Báo cáo, thảo luận - Đại diện nhóm Trọng tài trình bày Bản đồ lập luận hai phía. - GV chốt lại: Đây là bài học lớn về việc không thần thánh hóa AI; AI chỉ phản hồi dựa trên dữ liệu ngôn ngữ, người học phải dùng tư duy toán học và định nghĩa làm trọng tài tối cao.	HS đạt mức độ cao của năng lực số: Phản biện AI và nhận thức sâu sắc về quy ước toán học.
Bước 4: Kết luận, nhận định - GV tổng kết toàn bộ bài học và giao nhiệm vụ nộp bài tập số.	GV chốt toàn bộ bài học.

IV. ĐÁNH GIÁ VÀ THEO DÕI TIẾN BỘ

1. Phiếu kiểm tra nhanh sau bài học (Exit Ticket):

Câu 1: Nêu định nghĩa và điều kiện giới hạn để đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 2: Nêu định nghĩa và điều kiện giới hạn một bên để đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 3: Nêu 2 phương pháp xác định tiệm cận xiên $y = ax + b$ (chia đa thức và công thức tính giới hạn a, b).

Câu 4: Giải thích vì sao một đồ thị hàm số hoàn toàn có thể cắt đường tiệm cận của chính nó.

Câu 5: Phần mềm GeoGebra và máy tính Casio giúp em kiểm chứng được điều gì rõ nhất khi tìm các đường tiệm cận?

2. Ghi chú và điều chỉnh sau bài dạy:

– Thời lượng phân bố các hoạt động:

.....
– Khó khăn của học sinh khi tìm tiệm cận xiên và thao tác GeoGebra:

.....
– Hiệu quả của công cụ số (GeoGebra/Wikipedia/ChatGPT Voice/Quizizz):

.....