

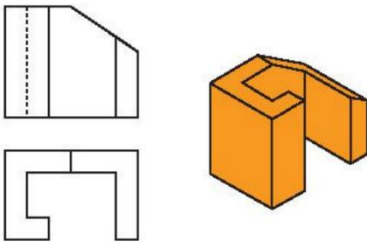
Chuyên đề 3. BÀI 11: HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ HÌNH CHIẾU TRỰC ĐO

Môn học: Toán; Lớp: 11

Thời gian thực hiện: 2 tiết (28, 29)

THUẬT NGỮ	KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
☐ Hình biểu diễn ☐ Hình chiếu vuông góc ☐ Hình chiếu trục đo ☐ Hình chiếu trục đo vuông góc đều. góc đều ☐ Hệ số biến dạng	☐ Nhận biết được hình biểu diễn của vật thể. ☐ Nhận biết được hình chiếu vuông góc. ☐ Nhận biết được hình chiếu trục đo và hình chiếu trục đo vuông góc đều.

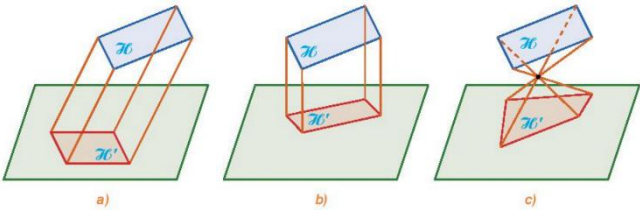
Trong vẽ kĩ thuật, người ta thường sử dụng các hình vẽ trên giấy để biểu diễn, mô tả các vật thể trong không gian (H.3.1). Toán học mô tả các hình vẽ đó như thế nào, và chúng có những đặc điểm gì? Em hãy cùng tìm hiểu qua bài học này.



Hình 3.1. Hình vẽ mô tả một chi tiết máy

1. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH, KHỐI

HD1. Hình 3.2 mô tả ba phép chiếu biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$. Em đã biết những phép chiếu nào trong ba phép chiếu đó? Hãy nhắc lại khái niệm về các phép chiếu mà em đã học.



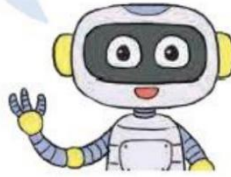
Hình 3.2

Hình biểu diễn $\mathcal{H}'$ của một hình, khối $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu của $\mathcal{H}$ lên một mặt phẳng qua một phép chiếu

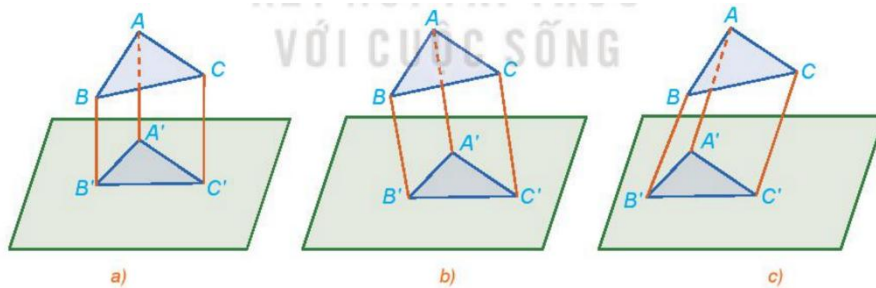
Nếu phép chiếu là phép chiếu vuông góc thì $\mathcal{H}'$ được là hình chiếu gọi là hình chiếu vuông góc của $\mathcal{H}$. phối cảnh của hình $\mathcal{H}$.

Nếu phép chiếu là phép chiếu song song (nhưng không là phép chiếu vuông góc) thì $\mathcal{H}'$ được gọi là hình chiếu trục đo của $\mathcal{H}$.

Phép chiếu còn lại trong Hình 3.2 được gọi là phép chiếu xuyên tâm và hình $\mathcal{H}'$ khi đó được gọi là hình chiếu phối cảnh của hình $\mathcal{H}$.



Ví dụ 1. Quan sát Hình 3.3 và cho biết hình nào thể hiện hình chiếu vuông góc, hình nào thể hiện hình chiếu trục đo của tam giác ABC .



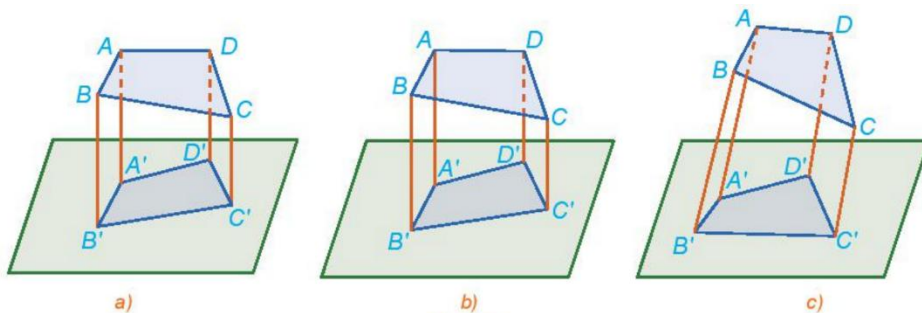
Hình 3.3

Giải

Trong Hình 3.3a các đường thẳng AA' , BB' , CC' đôi một song song và vuông góc với mặt phẳng chiếu. Do đó Hình 3.3a thể hiện hình chiếu vuông góc của tam giác ABC .

Trong Hình 3.3b và Hình 3.3c các đường thẳng AA' , BB' , CC' đôi một song song nhưng không vuông góc với mặt phẳng chiếu. Do đó Hình 3.3b và Hình 3.3c thể hiện hình chiếu trục đo của tam giác ABC .

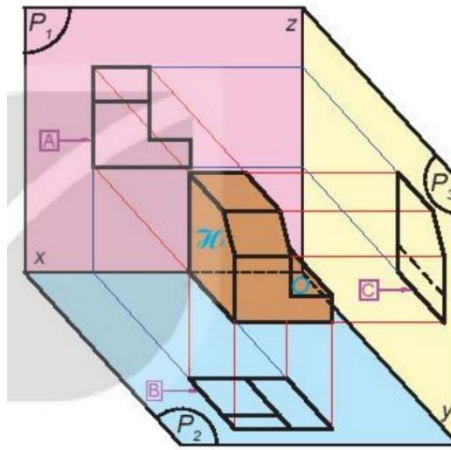
Luyện tập 1. . Quan sát Hình 3.4 và cho biết hình nào thể hiện hình chiếu trục đo của tứ giác $ABCD$.



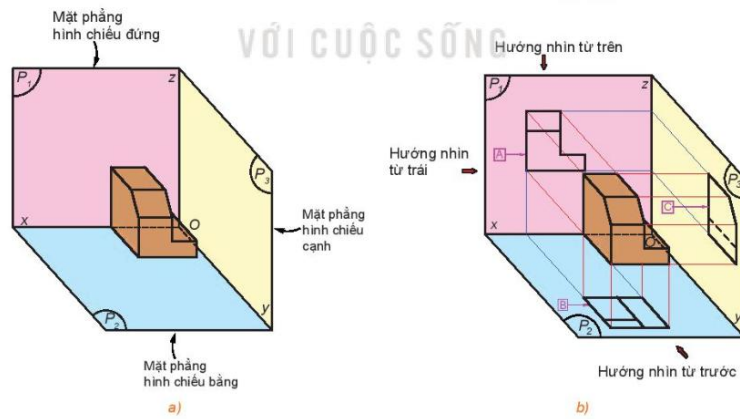
Hình 3.4

2. HÌNH CHIẾU ĐÚNG, HÌNH CHIẾU BẰNG VÀ HÌNH CHIẾU CẠNH.

HD2. Quan sát Hình 3.5 và cho biết các hình A , B , C có phải là hình chiếu của hình $\mathcal{H}$ qua các phép chiếu song song hoặc vuông góc hay không. Nếu có hãy chỉ rõ mặt phẳng chiếu và phương chiếu của mỗi phép chiếu đó.



Hình 3.5

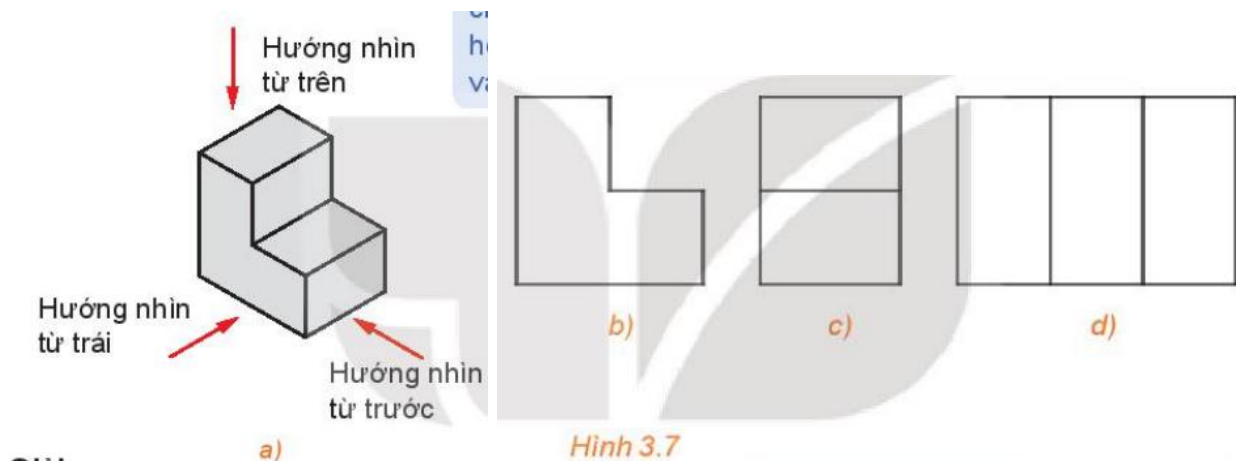


Hình 3.6

Cho hình $\mathcal{H}$ trong không gian và ba mặt phẳng $(P_1), (P_2), (P_3)$ đôi một vuông góc với nhau sao cho mặt phẳng (P_1) vuông góc với hướng nhìn từ phía trước của hình $\mathcal{H}$, mặt phẳng (P_2) vuông góc với hướng nhìn từ phía trên của hình $\mathcal{H}$ và mặt phẳng (P_3) vuông góc với hướng nhìn từ phía trái của hình $\mathcal{O}(\text{H.3.6})$. Khi đó:

- Các mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ và (P_3) lần lượt được gọi là mặt phẳng hình chiếu đứng, mặt phẳng hình chiếu bằng và mặt phẳng hình chiếu cạnh.
- Các hình chiếu vuông góc của hình $\mathcal{B}$ lên các mặt phẳng $(P_1), (P_2), (P_3)$ lần lượt được gọi là hình chiếu đứng, hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh của hình $\mathcal{B}$.

Ví dụ 2. Xác định hình chiếu vuông góc của hình $\mathcal{H}$ trong các hình dưới đây (Hình 37)



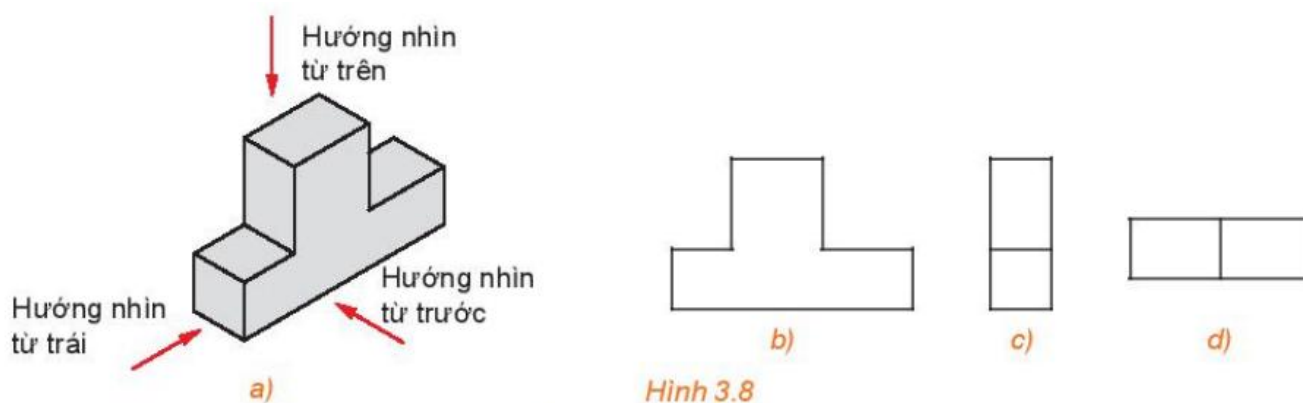
Hình 3.7

Trong vẽ kĩ thuật, người ta có thể sử dụng thêm các hướng nhìn từ sau ra trước, từ dưới lên trên và từ phải sang trái để nhận được thêm ba hình chiếu của vật thể, từ đó giúp hình dung vật thể rõ hơn. Tuy nhiên, hình chiếu đứng, hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh thường là đủ để mô tả vật thể.

Giải

Hình 3.7 b là hình chiếu cạnh của hình $\mathcal{H}$. Hình 3.7 c vừa là hình chiếu đứng vừa là hình chiếu từ trước, em nhìn bằng của hình $\mathcal{H}$. Hình 3.7 d không là hình chiếu thấy những phần vuông góc nào của hình $\mathcal{H}$

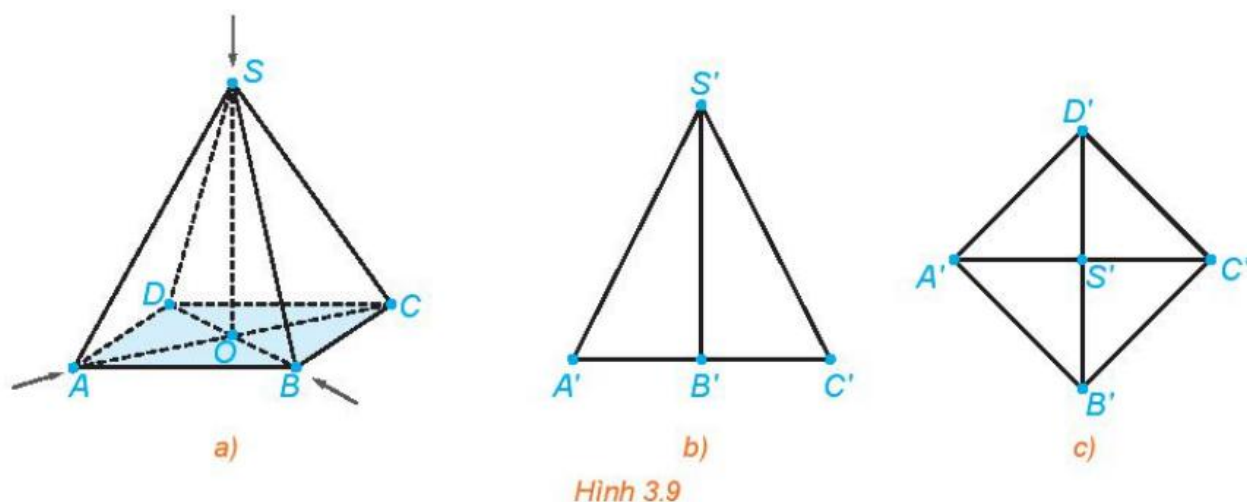
Luyện tập 2. Xác định hình chiếu vuông góc của hình $\mathcal{H}$ trong các hình dưới đây (Hình 3.8)



Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ (H.3.9a). Xác định hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của hình chóp nếu chọn mặt phẳng hình chiếu đứng (P_1) song song với mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng hình chiếu bằng (P_2) song song với mặt phẳng (ABCD).

Giải

Hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của hình chóp $S.ABCD$ lần lượt được cho như trong Hình 3.9 b và Hình 3.9c



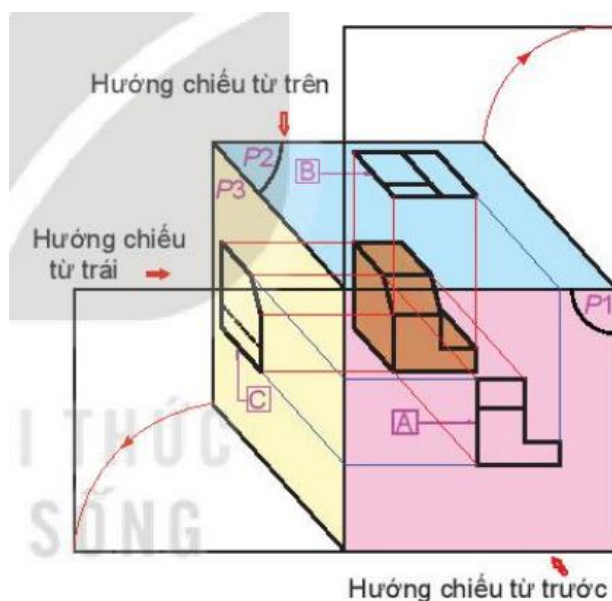
Luyện tập 3. Thực hiện Ví dụ 2 khi mặt phẳng hình chiếu đứng (P_1) song song với mặt phẳng (SBD), mặt phẳng hình chiếu bằng (P_2) song song với mặt phẳng (ABCD).

Nhận xét. Trong Ví dụ 2 đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC) nên cũng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu đứng (P_1). Do đó hình chiếu đứng của ba điểm này trùng nhau.

Một cách tổng quát, các hình chiếu đứng, hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh có các tính chất của hình chiếu vuông góc, ví dụ như hình chiếu của trung điểm là trung điểm, hình chiếu của các đường thẳng song song là các đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Hãy giải thích tại sao trong Hình 3.6 b, điểm B' (hình chiếu đứng của B) là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$ (hình chiếu đứng của AC)

Vận dụng 1. Trong vẽ kỹ thuật có hai phương pháp chiếu là phương pháp chiếu góc thứ nhất và phương pháp chiếu góc thứ ba. Với phương pháp chiếu góc thứ nhất, vật thể luôn nằm giữa người quan sát và các mặt phẳng hình chiếu (H.3.5), còn với phương pháp chiếu góc thứ ba thì các mặt phẳng hình chiếu luôn nằm giữa người quan sát và vật thể (H.3.10). Mỗi hình chiếu đứng, hình chiếu cạnh và hình chiếu bằng nhận được từ hai phương pháp chiếu đều bằng nhau. Hãy giải thích tại sao.



Hình 3.10

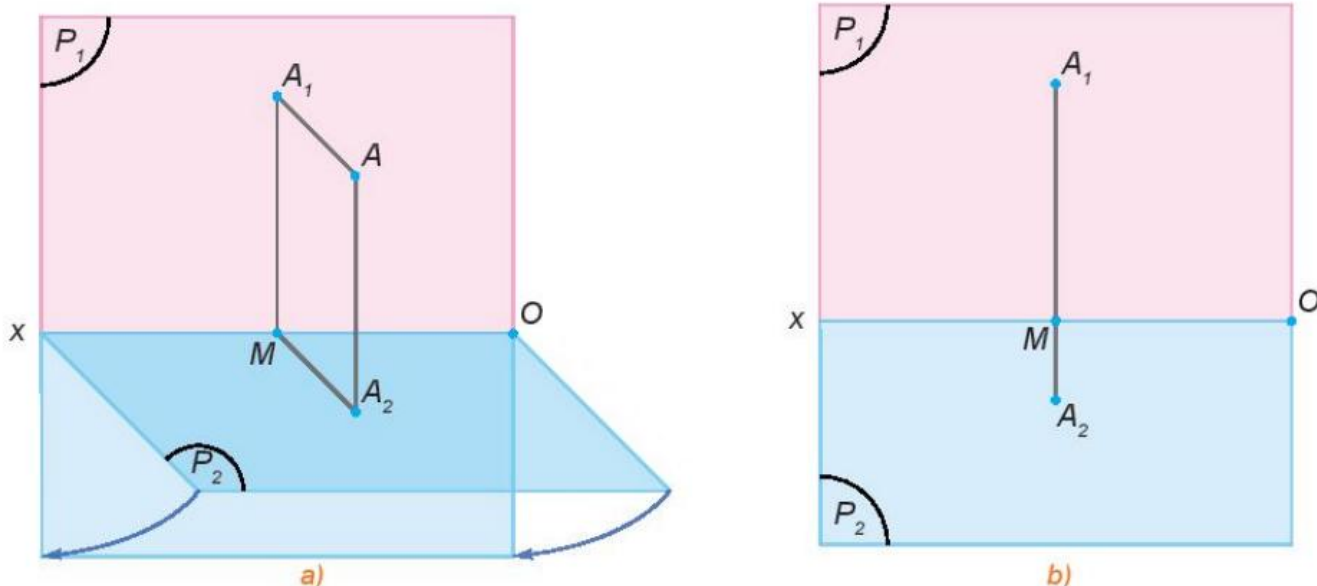
Chú ý. Vì hình chiếu nhận được qua hai phương pháp chiếu góc thứ nhất và thứ ba là như nhau của một hình lên hai các hình chiếu được nhắc tới đều lấy theo mặt phẳng song song phương pháp chiếu góc thứ nhất, có bằng nhau không?

3. MỐI LIÊN HỆ GIỮA BA HÌNH CHIỀU VUÔNG GÓC

Trong không gian cho điểm A và hai mặt phẳng hình chiếu đứng, hình chiếu bằng (P_1), (P_2) cắt nhau theo giao tuyến Ox . Gọi A_1 và A_2 lần lượt là hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của điểm A (H.3.11a). Quay mặt phẳng (P_2) quanh Ox sao cho (P_2) trùng với (P_1), khi đó hai điểm A_1 và A_2 cùng thuộc mặt phẳng (P_1) (H.3.11b).

a) Nhận xét về vị trí của các điểm A_1, A_2 đối với đường thẳng Ox . Đường thẳng A_1A_2 có vuông góc với Ox hay không?

b) Hãy trình bày cách xác định điểm A khi biết các điểm A_1, A_2 trong mặt phẳng (P_1).

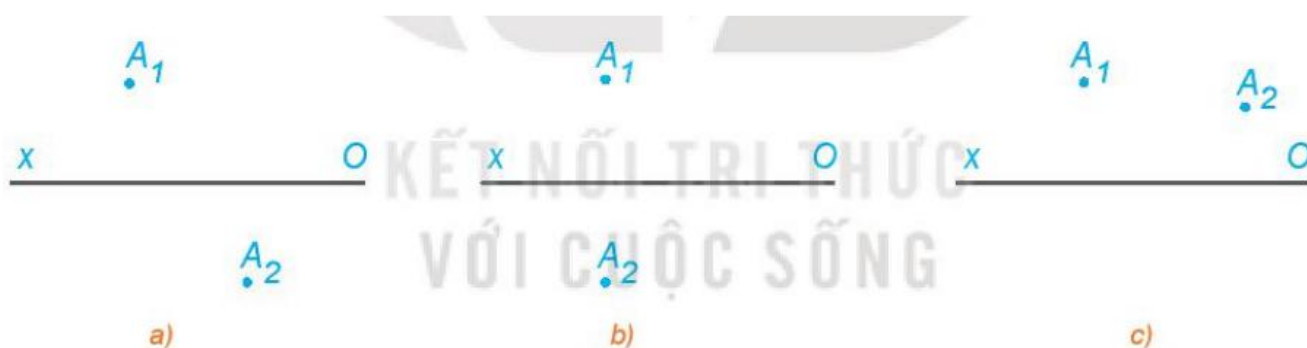


Hình 3.11

Một điểm trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết hai hình chiếu của điểm đó. Vì vậy, một vật thể hoàn toàn được xác định nếu biết hai hình chiếu của mỗi điểm thuộc vật thể đó.

Trong vẽ kỹ thuật, Hình 3.11 b) được gọi là đồ thức của điểm A . Khoảng cách từ điểm A đến hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ lần lượt được gọi là độ xa và độ cao của A .

Ví dụ 4. Trong Hình 3.12, hình nào thể hiện đúng hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của một điểm A trong không gian?

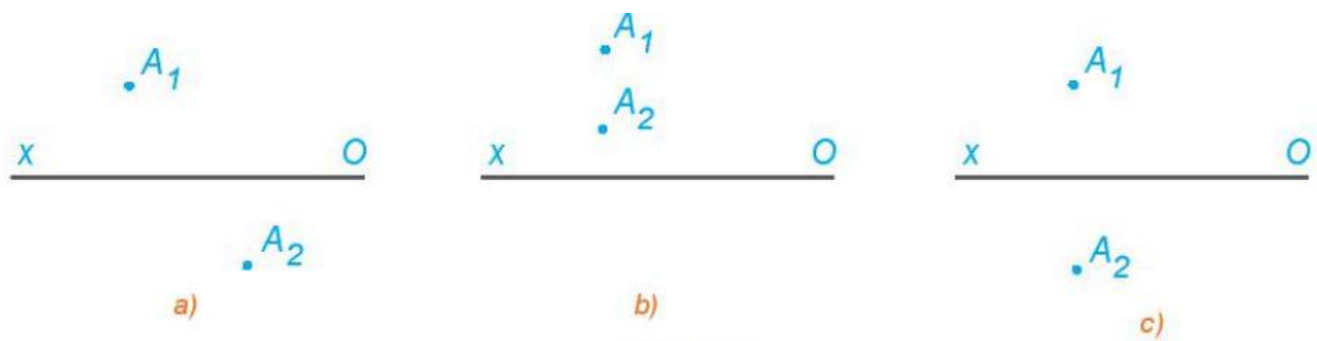


Hình 3.12

Giải

Nếu A_1 và A_2 là hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của điểm A thì đường thẳng A_1A_2 vuông góc với Ox . Do đó chỉ có Hình 3.12b thể hiện đúng hai hình chiếu của điểm A .

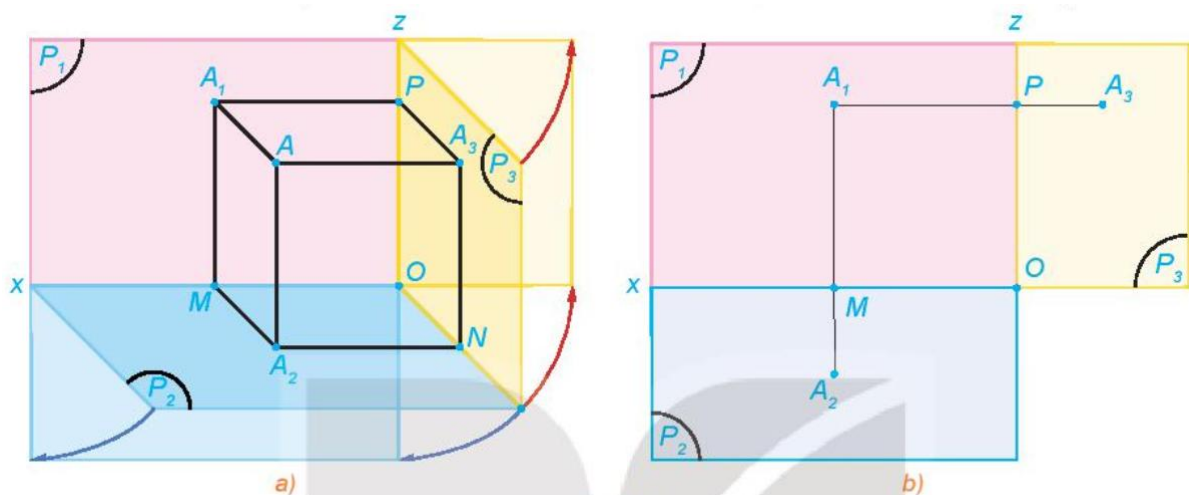
Luyện tập 4. Trong Hình 3.13, hình nào thể hiện đúng hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của một điểm A trong không gian?



Hình 3.13

HD 4. Trong HĐ2 gọi (P_3) là mặt phẳng hình chiếu cạnh và A_3 là hình chiếu cạnh của A . Gọi Oz là giao tuyến của (P_1) và (P_3) , Oy là giao tuyến của (P_2) và (P_3) . Quay mặt phẳng (P_2) quanh Ox sao cho (P_2) trùng với (P_1) và quay mặt phẳng (P_3) quanh Oz sao cho (P_3) trùng với (P_1) , khi đó ba điểm A_1, A_2, A_3 cùng thuộc mặt phẳng (P_1) . (H.3.14)

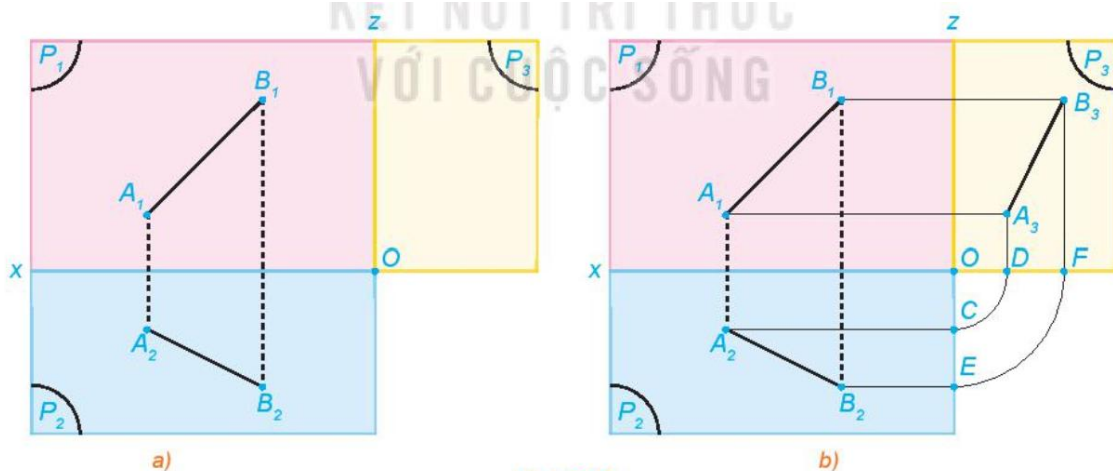
- a) Đường thẳng A_1A_2 có vuông góc với đường thẳng Oz hay không? Khoảng cách từ A_3 đến Oz có bằng khoảng cách từ A_2 đến Ox hay không?
- b) Trong mặt phẳng (P_1) , trình bày cách xác định điểm A_3 khi biết hai điểm A_1, A_2



Hình 3.14

Trong mặt phẳng (P_1) , một trong ba điểm A_1, A_2, A_3 hoàn toàn được xác định nếu biết hai điểm còn lại

Ví dụ 5. Hình 3.15a thể hiện hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của đoạn thẳng AB trong không gian. Xác định hình chiếu cạnh của đoạn thẳng đó

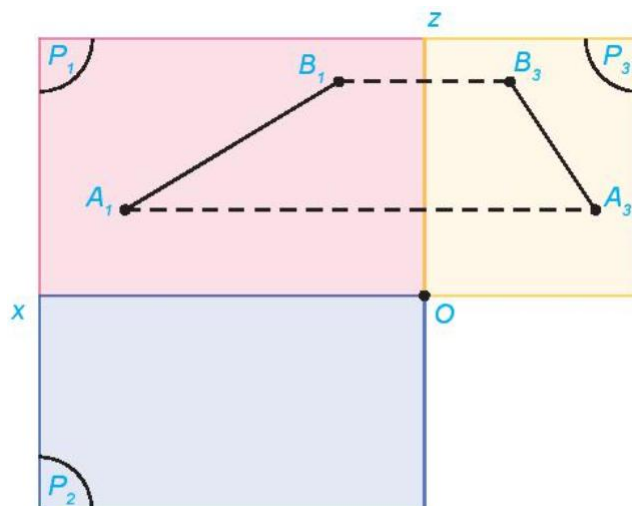


Hình 3.15

Giải

Hình chiếu cạnh của đoạn thẳng AB có hai đầu mút là hình chiếu cạnh A_3 của A và B_3 của B . Để xác định A_3 ta làm như sau: Qua điểm A_2 vẽ đường thẳng vuông góc với Oz tại C và trên Ox lấy điểm D sao cho $OC = OD$ (H3.15b). Đường thẳng qua A_1 và vuông góc với Oz cắt đường thẳng qua D và vuông góc với Ox tại A_3 . Tương tự xác định B_3 . Nối A_3 và B_3 ta nhận được hình chiếu cạnh của đoạn thẳng AB .

Luyện tập 5. Hình 3.16 thể hiện hình chiếu đứng và chiếu cạnh của một đoạn thẳng AB trong không gian. Xác định hình chiếu bằng của đoạn thẳng đó



Hình 3.16

Vận dụng 2. Dựa vào mối liên hệ giữa ba hình chiếu, giải thích cách bố trí các hình chiếu trên bản vẽ kỹ thuật. Vì sao đối với một số vật thể đơn giản, bản vẽ kỹ thuật chỉ thể hiện hai thay vì ba hình chiếu?

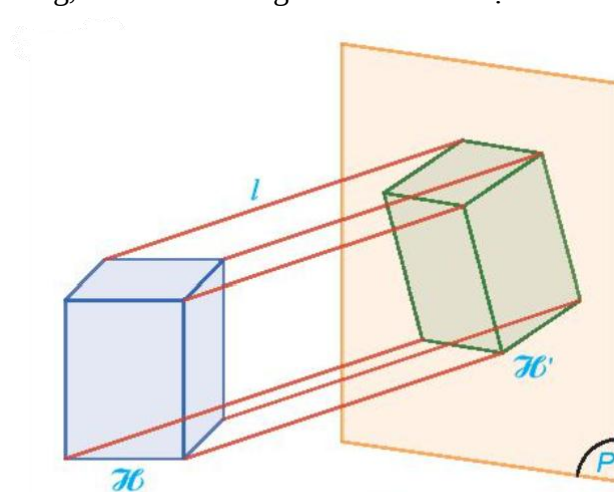
Ngày nay khi sử dụng các phần mềm đồ họa như AutoCAD, SketchUP, Photoshop... ta chỉ cần vẽ hình hai chiều bất kỳ của vật thể, phần mềm sẽ phân tích, xử lý và cho ra hình chiếu còn lại.

4. HÌNH CHIẾU TRỰC ĐO

HĐ5. Cho hình hộp chữ nhật H quan sát hình chiếu song song H' của hình H lên mặt phẳng (P) theo phương l (H.3.16) và trả lời các câu hỏi sau:

- Hình H' có phải là hình chiếu đứng, hình chiếu bằng hay hình chiếu cạnh của hình H hay không?
- Phương chiếu l có song song với mặt nào của hình hộp chữ nhật H hay không?

Nhắc lại khái niệm hình chiếu đứng, hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh.



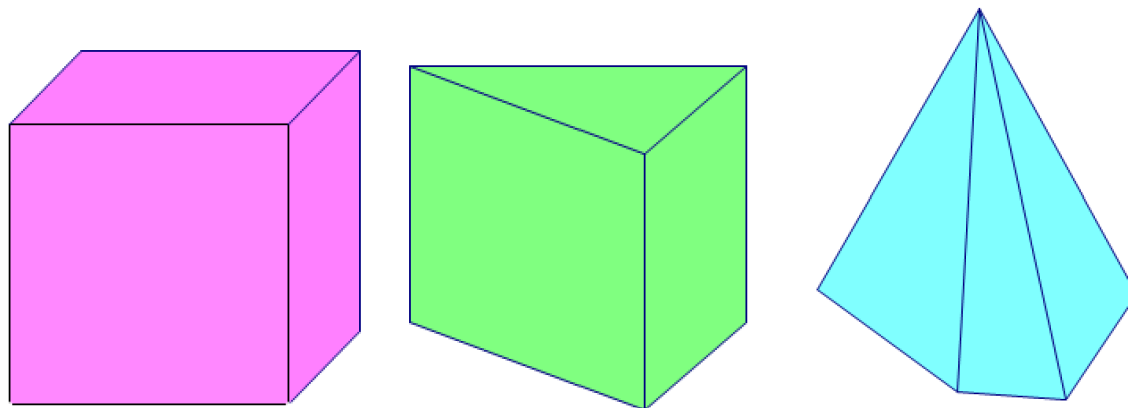
Hình 3.17

Hình chiếu song song của một hình H lên mặt phẳng

Hình chiếu song song của một hình H lên mặt phẳng (P) theo phương l không song song với bề mặt nào của hình H được gọi là **hình chiếu trực đo** của H .

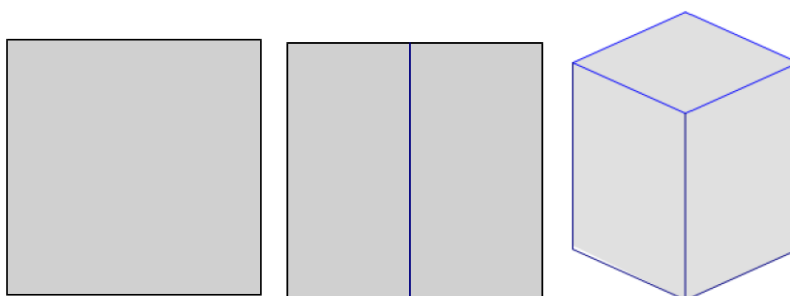
Tại sao hình chiếu trực đo thường thể hiện nhiều mặt của vật thể hơn so với hình chiếu vuông góc?

Nhận xét. Vì hình chiếu trực đo thường thể hiện được nhiều mặt của vật thể hơn so với hình chiếu vuông góc nên nó giúp người xem hình dung vật thể rõ ràng hơn. Trên thực tế, hầu hết các hình biểu diễn có tính lập thể (hay hình 3D) mà em đã từng gặp đều là hình chiếu trực đo (H.3.18).

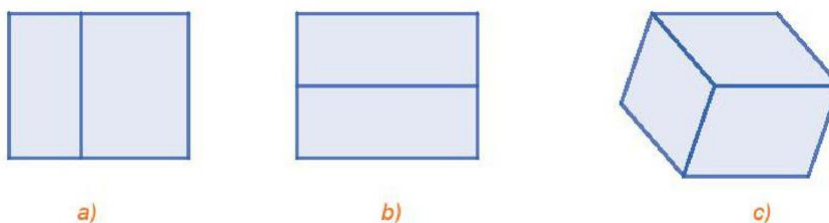


Ví dụ 6. Trong các hình chiếu song song sau (H.3.19), hình nào là hình chiếu trực đo của một hình lập phương?

Trong Hình 3.19 a và 3.19 b chỉ thấy được hai mặt của hình lập phương, tức là phép chiếu song song tương ứng có phương chiếu song song với ít nhất một mặt của hình lập phương. Vì vậy Hình 3.19a và 3.19b không là hình chiếu trực đo của hình lập phương. Trong Hình 3.19 có thể thấy được cả ba mặt của hình lập phương nên hình này là hình chiếu trực đo của hình lập phương.



Luyện tập 6. Trong các hình chiếu song song sau (H.3.20), hình nào thể hiện đúng hình chiếu trực đo của một hình hộp chữ nhật?



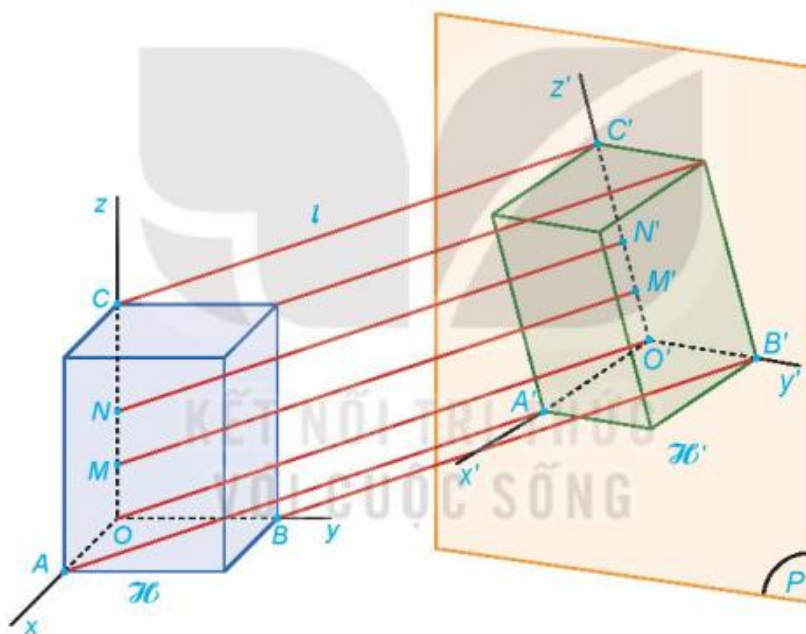
Vận dụng 3. Xoay một hình lập phương để có thể quan sát được cả ba mặt của nó. Khi đó các phần quan sát được của hình lập phương có tạo thành hình chiếu trực đo của nó hay không? Hãy giải thích tại sao.

HD6. Giả sử hình hộp chữ nhật $\mathcal{H}$ trong HD1 được gắn thêm các trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc dọc theo chiều dài, chiều rộng, chiều cao của $\mathcal{H}$. Gọi $O'x', O'y', O'z'$ lần lượt là hình chiếu của các trục đó lên mặt phẳng (P) theo phương l (H.3.21)

a) Hình chiếu của các góc xOy, yOz, zOx là các góc nào trên mặt phẳng hình chiếu?

b) Giả sử M, N là hai điểm thuộc trục Oz và M', N' là hình chiếu tương ứng thuộc trục $O'z'$. So sánh hai tỷ số $\frac{O'M'}{OM}$ và $\frac{O'N'}{ON}$

Nhắc lại tính chất bảo toàn tỉ số độ dài đoạn thẳng của phép chiếu song song.



Hình 3.21

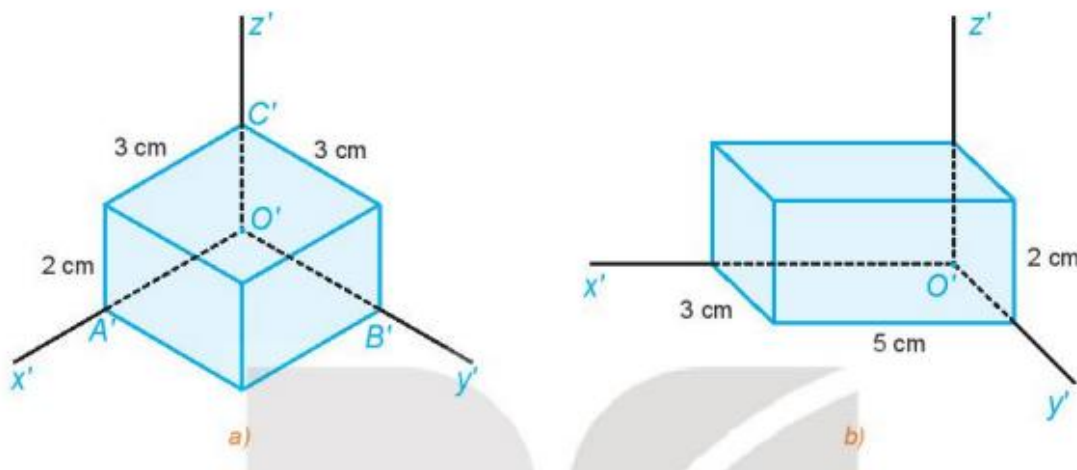
Cho hình $\mathcal{H}$ và các trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được đặt dọc theo ba chiều của hình $\mathcal{H}$.

- Hình chiếu $O'x', O'y', O'z'$ của các trục Ox, Oy, Oz được gọi là các trục đo.
- Các góc $x'O'y', y'O'z', z'O'x'$ được gọi là các góc trục đo.
- Hệ số biến dạng theo mỗi trục là tỷ số độ dài hình chiếu của một đoạn thẳng nằm trên trục đó hoặc song song với trục đó với độ dài thực tế của đoạn thẳng đó.

Trong hình 3.26, các tỉ số $p = \frac{O'A'}{OA}$, $q = \frac{O'B'}{OB}$ và $r = \frac{O'C'}{OC}$ lần lượt được gọi là **Hệ số biến dạng** theo trục $O'x', O'y', O'z'$.

Chú ý. Hệ số biến dạng trên mỗi trục đo phụ thuộc vào vị trí tương đối của mỗi trục với mặt phẳng chiếu và phụ thuộc vào phương chiếu. Mục 2 của bài này sẽ trình bày một phép chiếu trục đo đặc biệt mà ở đó các hệ số biến dạng được lựa chọn để thuận tiện cho việc vẽ hình chiếu trục đo của vật thể.

Ví dụ 7. Cho hình lập phương có độ dài mỗi cạnh là 6 cm. Hình chiếu trục đo của hình lập phương được cho như trong Hình 3.22a. Tính hệ số biến dạng theo mỗi trục đo.



Hình 3.22

Giải

Gọi O, A, B, C là các đỉnh của hình lập phương có hình chiếu lần lượt là O', A', B', C' .

Khi đó $OA = OB = OC = 6 \text{ cm}$ và các hệ số biến dạng lần lượt là $p = \frac{O'A'}{OA} = \frac{3}{6} = 0,5$; $q = \frac{O'B'}{OB} = \frac{3}{6} = 0,5$

và $r = \frac{O'C'}{OC} = \frac{2}{6} \approx 0,33$.

Luyện tập 7. Hình chiếu trục đo của một hình hộp chữ nhật được cho như trong Hình 3.21b.

Biết các hệ số biến dạng là $p = 1, q = r = 0,5$. Tính kích thước thực tế của hình hộp chữ nhật đó.

HD7. Cho hình tứ diện vuông $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC bằng nhau và lần lượt nằm trên các trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc. Xét phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) đi qua O sao cho các trục Ox, Oy, Oz tạo với (P) các góc bằng nhau (H.3.22a). Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C .

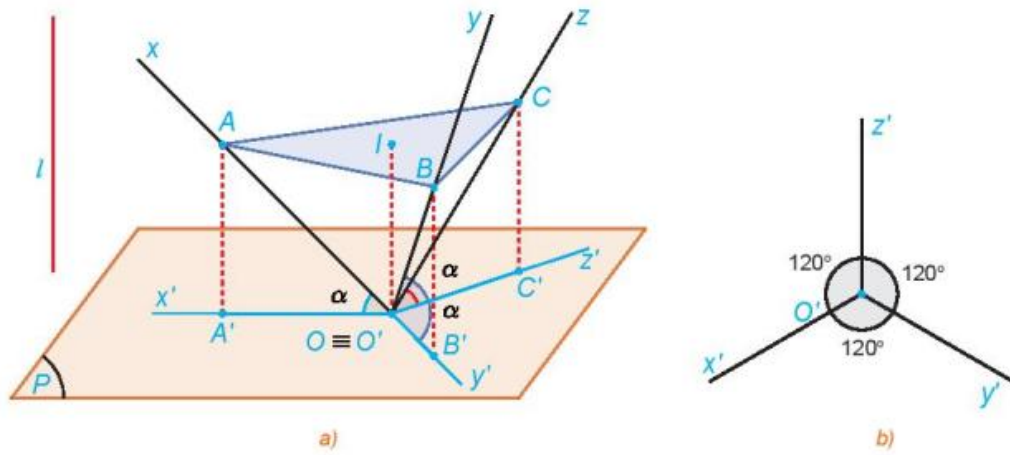
a) Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

Trong HD3, $AIB.A'O'B'$ là hình lăng trụ đứng tam giác



b) Giải thích tại sao các khoảng cách từ A, B, C đến (P) bằng nhau, từ đó suy ra mặt phẳng (ABC) song song với mặt phẳng (P) .

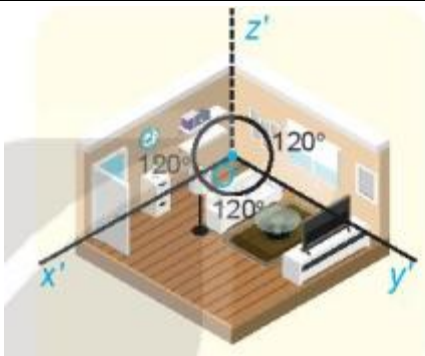
c) Gọi I là tâm tam giác đều ABC . Giải thích tại sao $A'O'B' = AIB$, từ đó suy ra $A'O'B' = B'O'C' = A'O'C' = 120^\circ$



Hình 3.23

Trong hình chiếu trục đo vuông góc đều có:

- Mặt phẳng chiếu (P) vuông góc với phương chiếu l ;
- Các góc trục đo đều bằng 120° (H.3.23b);
- Các hệ số biến dạng đều bằng 1.

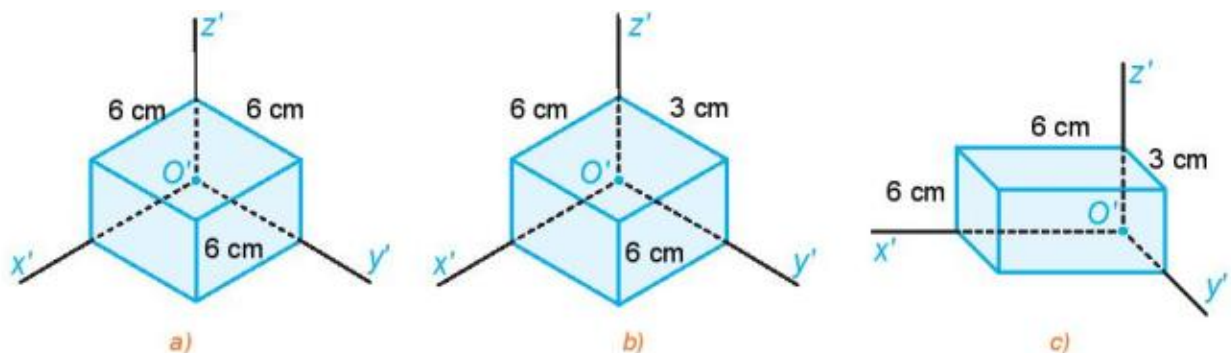


Hãy quan sát hình ảnh mở đầu (H.3.1) và cho biết hình nào là hình chiếu trục đo vuông góc đều của vật thể.

Nhận xét. Trong **HD7**, ta có thể chứng minh được $\frac{O'A'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,82$ (xem bài tập 3.10)

và do đó các hệ số biến dạng theo các trục bằng 0,82. Tuy nhiên, để thuận tiện cho việc tính toán và vẽ hình, ta thường quy ước các hệ số biến dạng bằng 1.

Ví dụ 8. Cho một hình lập phương có độ dài mỗi cạnh là 6cm. Hình nào trong Hình 3.26 thể hiện đúng hình chiếu trục đo vuông góc đều của hình lập phương đó?



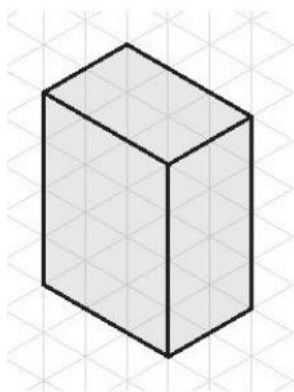
Hình 3.24

Giải

Hình 3.24c có các góc trục đo khác 120° nên không là hình chiếu trục đo vuông góc đều.

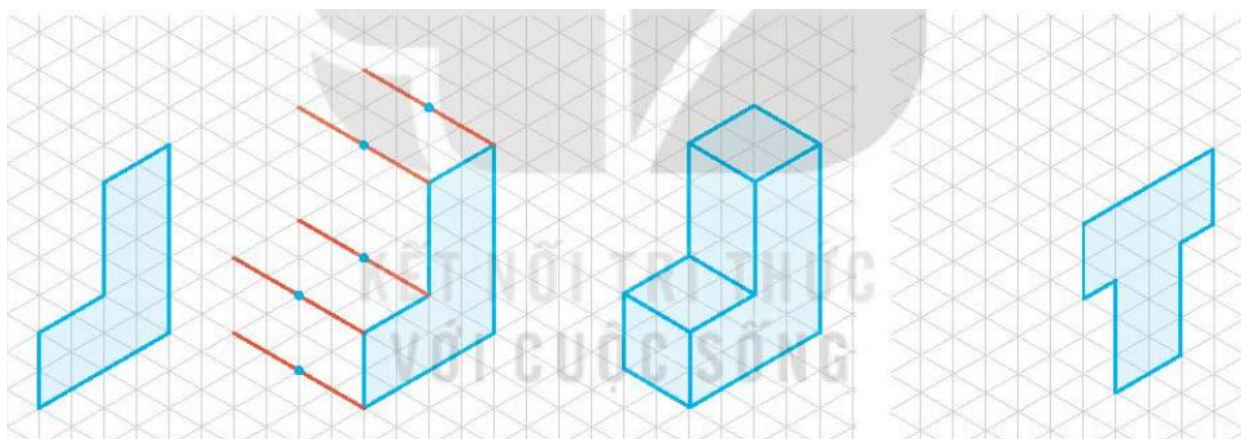
Hình 3.24b là hình chiếu trục đo vuông góc đều nhưng không thể hiện đúng kích thước của hình lập phương. Chỉ có Hình 3.24a là hình chiếu trục đo vuông góc đều và thể hiện đúng kích thước của hình lập phương.

Luyện tập 8. Hình chiếu trục đo của một hình hộp chữ nhật được vẽ trên giấy kẻ ô tam giác đều như trong hình 3.25. Quy ước độ dài mỗi cạnh của tam giác đều là $10mm$ xác định kích thước mỗi chiều của hình hộp đó.



Hình 2.35

Vận dụng 4. Hình 3.26a thể hiện cách vẽ dạng nổi chữ cái “L” trên giấy kẻ ô tam giác đều. Hình nhận được là một hình chiếu trục đo vuông góc đều. Bằng cách tương tự hãy vẽ dạng nổi của chữ cái “T” (H 3.26b)



Hình 3.26a

Hình 3.26b

BÀI TẬP

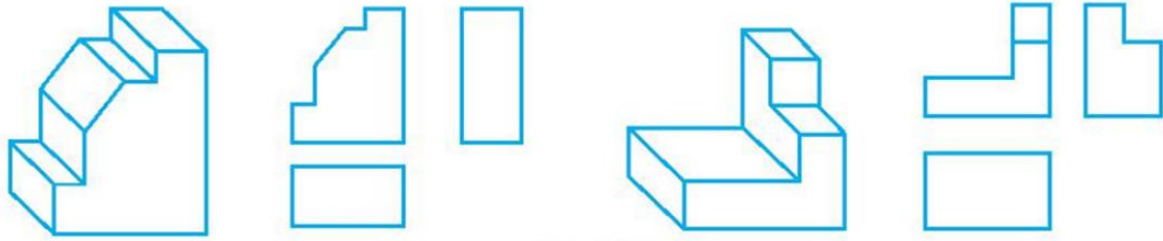
3.1 Trong các khẳng định sau, những khẳng định nào đúng?

- Hình chiếu đứng của một hình H là hình chiếu song song của hình H lên một mặt phẳng nào đó.
- Hình chiếu đứng và hình chiếu bằng nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau.
- Hình chiếu cạnh của một đường thẳng luôn là một đường thẳng.
- Hình chiếu bằng của hai điểm phân biệt luôn là hai điểm phân biệt.

3.2 Cho ví dụ về một vật thể có cả ba hình chiếu vuông góc là:

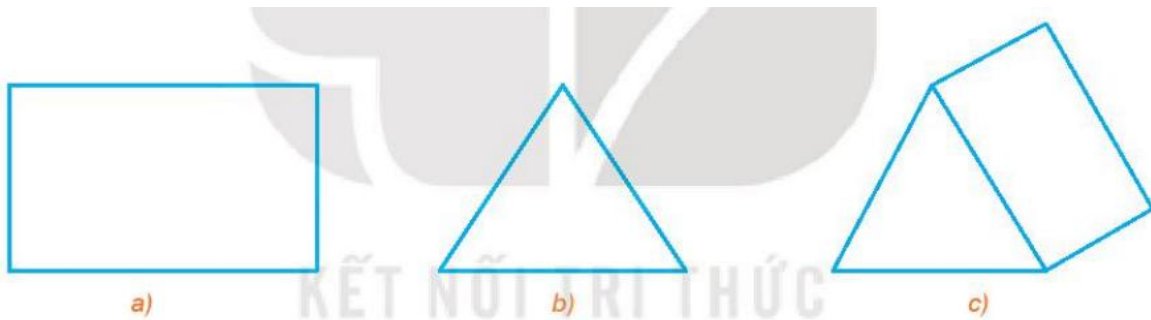
- Hình chữ nhật.
- Hình tròn.

3.3 Trên hình chiếu của mỗi vật thể (H 3.27) còn thiếu một số nét. Bổ sung các nét còn thiếu đó.



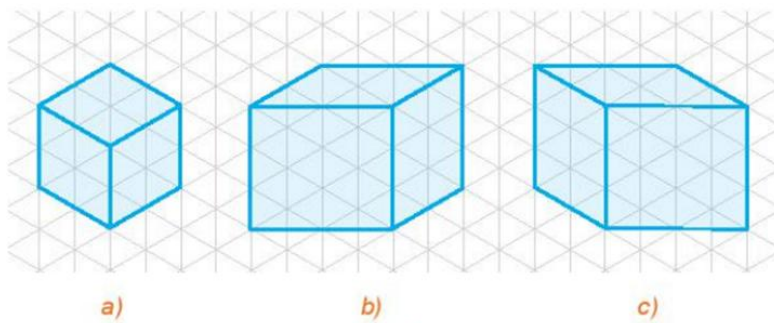
Hình 3.27

- 3.4 Bạn Hoàng nói rằng, “hình chiếu đứng của một đoạn thẳng luôn có độ dài lớn hơn độ dài của đoạn thẳng đó”. Bạn Hoàng nói đúng hay sai? Vì sao?
- 3.5 Khi nào thì hình chiếu đứng của một đoạn thẳng AB là một điểm? Khi nào thì hình chiếu của một đoạn thẳng AB là một điểm?
- 3.6 Cho đoạn thẳng AB và gọi A_1, B_1 là hình chiếu đứng của AB . Biết đường thẳng AB song song với mặt phẳng hình chiếu đứng, chứng minh rằng $AB = A_1B_1$.
- 3.7 Trong các hình của hình 3.28, hình nào là hình chiếu trực đo của hình lăng trụ tam giác?



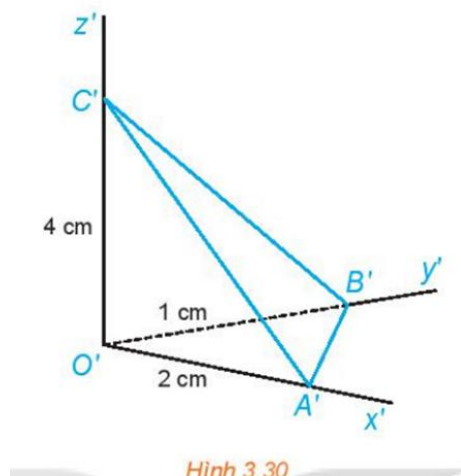
Hình 3.28

- 3.8 Trong các hình của hình 3.29, hình nào là hình chiếu trực đo vuông góc đều của hình lập phương? Giải thích vì sao.



Hình 3.29

- 3.9 Cho hình tứ diện $OABC$ có $OA = 2cm$, $OB = 3cm$, $OC = 6cm$. Hình chiếu trực đo của hình tứ diện được cho như trong hình 3.30. Tính hệ số biến dạng theo mỗi trục đo.



Hình 3.30

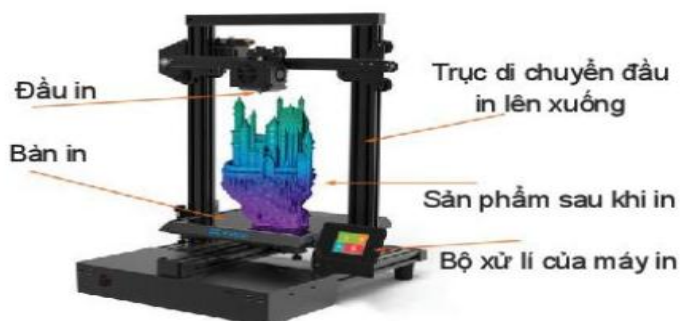
3.10 Trong HĐ3, bằng cách xét tam giác vuông OIA và tính tỉ số $\frac{IA}{OA}$, Chứng minh rằng trong phép

chiếu trục đo vuông góc đều thì $p = q = r = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

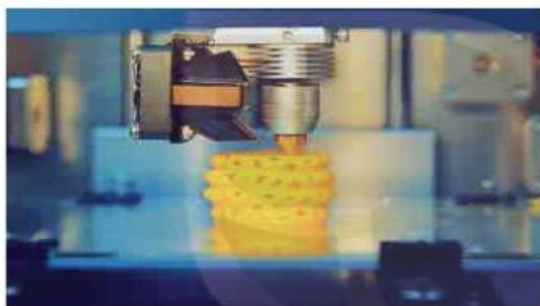
3.11 Hình chiếu trục đo của một vật thể được vẽ trên giấy kẻ ô tam giác đều như trong hình 3.31. Quy ước độ dài mỗi cạnh của tam giác đều là 10cm , tính thể tích của vật thể đó.

Em có biết?

Công nghệ in 3D đã được phát triển và áp dụng vào thực tế từ những năm 1980 bởi Charles Hull. Để in 3D, phần mềm của máy in sẽ phân tách vật thể thành các lớp chồng lên nhau, sau đó tính toán đường chạy cho đầu in để in từng lớp. Hết một lớp in, đầu in sẽ dịch chuyển lên trên để in lớp tiếp theo. Làm thế nào để phần mềm máy in 3D thực hiện được điều đó



Máy in 3D



Quá trình in từng lớp của vật thể

Bắt đầu từ bản vẽ kỹ thuật của vật thể, các phần mềm đồ họa sẽ dựng lên hình ảnh ba chiều của vật thể cần in. Hình ảnh này thường được lưu trữ ở dạng tệp STL (Standard Triangle Language) cho phép mã hóa bề mặt của vật thể dưới dạng một “lưới tam giác”. Phần mềm của máy in 3D khi nhận tệp STL có thể phân tích “lưới tam giác” này để chia vật thể thành các lớp; độ phân giải của “lưới tam giác” càng

cao, tức là kích thước của mỗi tam giác trong lưới càng nhỏ, thì mỗi lớp in càng mỏng và do đó sản phẩm sau khi in càng mịn.