

TÊN BÀI DẠY: CHƯƠNG V. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC
Bài 15: GIỚI HẠN DÃY SỐ

Môn học: Toán; lớp: 11.

Thời gian thực hiện: 2 tiết (40,41)

A. MỤC TIÊU

1. Kiến thức

- Định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số, một vài giới hạn đặc biệt, giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương.
- Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.
- Giới hạn tại vô cực.

2. Năng lực

- Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học thông qua việc giải thích giới hạn dãy số
- Rèn luyện năng lực mô hình hóa toán học, năng lực giải quyết vấn đề thông qua việc vận dụng giới hạn dãy số mô tả/ giải thích các quá trình gắn với thực tiễn
- Năng lực tự học: Học sinh xác định đúng đắn động cơ thái độ học tập; tự đánh giá và điều chỉnh được kế hoạch học tập; tự nhận ra được sai sót và cách khắc phục sai sót.
- Năng lực giải quyết vấn đề: Biết tiếp nhận câu hỏi, bài tập có vấn đề hoặc đặt ra câu hỏi. Phân tích được các tình huống trong học tập.
- Năng lực tự quản lý: Làm chủ cảm xúc của bản thân trong quá trình học tập vào trong cuộc sống; trưởng nhóm biết quản lý nhóm mình, phân công nhiệm vụ cụ thể cho từng thành viên nhóm, các thành viên tự ý thức được nhiệm vụ của mình và hoàn thành được nhiệm vụ được giao.
- Năng lực giao tiếp: Tiếp thu kiến thức trao đổi học hỏi bạn bè thông qua hoạt động nhóm; có thái độ tôn trọng, lắng nghe, có phản ứng tích cực trong giao tiếp.
- Năng lực hợp tác: Xác định nhiệm vụ của nhóm, trách nhiệm của bản thân đưa ra ý kiến đóng góp hoàn thành nhiệm vụ của chủ đề.
- Năng lực sử dụng ngôn ngữ: Học sinh nói và viết chính xác bằng ngôn ngữ Toán học.

3. Phẩm chất

- Rèn luyện tính cẩn thận, chính xác. Tư duy các vấn đề toán học một cách lôgic và hệ thống.
- Chủ động phát hiện, chiếm lĩnh tri thức mới, biết quy lạ về quen, có tinh thần trách nhiệm hợp tác xây dựng cao.
- Chăm chỉ tích cực xây dựng bài, chủ động chiếm lĩnh kiến thức theo sự hướng dẫn của GV.
- Năng động, trung thực sáng tạo trong quá trình tiếp cận tri thức mới, biết quy lạ về quen, có tinh thần hợp tác xây dựng cao.
- Hình thành tư duy logic, lập luận chặt chẽ, và linh hoạt trong quá trình suy nghĩ.

B. THIẾT BỊ DẠY HỌC VÀ HỌC LIỆU

- Kiến thức về dãy số, dãy số bị chặn.
- Máy chiếu
- Bảng phụ
- Phiếu học tập

C. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC :

Tiết 1

1. HOẠT ĐỘNG 1: HOẠT ĐỘNG KHỞI ĐỘNG: GIỚI THIỆU (3 phút)

a) Mục tiêu: Học sinh tiếp cận với khái niệm “giới hạn”

b) Nội dung: GV hướng dẫn, tổ chức học sinh ôn tập, tìm tòi các kiến thức liên quan bài học đã biết
H1- Hình sau nói về một nghịch lý có tên là nghịch lý đường tròn. Nghịch lý này: Xét một đường tròn và một đa giác đều nội tiếp đường tròn ấy (Hình dưới).

Bạn có nhận xét gì về đa giác n cạnh ấy nếu như số cạnh cứ không ngừng tăng lên, tăng mãi mãi đến vô tận?

c) Sản phẩm:

Câu trả lời của HS

Khi n không ngừng tăng lên thì đa giác sẽ càng ngày càng trở thành hình tròn mà nó nội tiếp. Điều này cũng không quá khó để tưởng tượng. Khi ấy ta nói giới hạn của đa giác khi n tiến tới vô tận sẽ là đường tròn.

d) Tổ chức thực hiện:

*) **Chuyển giao nhiệm vụ** : GV nêu câu hỏi

*) **Thực hiện**: HS suy nghĩ độc lập

*) **Báo cáo, thảo luận**:

- GV gọi hs, trình bày câu trả lời của mình
- Các học sinh khác nhận xét, bổ sung để hoàn thiện câu trả lời.

*) **Đánh giá, nhận xét, tổng hợp**:

- GV đánh giá thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tổng hợp kết quả.
- Dẫn dắt vào bài mới.

Nêu tình huống có vấn đề liên quan đến bài học

Đặt vấn đề: Làm thế nào để tính giới hạn của các dãy số sau:

$$a, u_n = \frac{1}{n^3} \quad b, u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad c, u_n = \frac{3n+1}{2n-3} \quad d, u_n = n^3 + 3n$$

2. HOẠT ĐỘNG 2: HÌNH THÀNH KIẾN THỨC MỚI

I. Giới hạn hữu hạn của dãy số

a) **Mục tiêu**: Phát biểu và giải thích được các định nghĩa về giới hạn hữu hạn của dãy số. Viết và đọc được các kí hiệu về giới hạn hữu hạn của dãy số, nêu được các giới hạn hữu hạn đặc biệt của dãy số, sử dụng định nghĩa chứng minh được dãy số có giới hạn hữu hạn, thái độ nghiêm túc, hợp tác. Phát triển năng lực hợp tác, ra quyết định, giao tiếp, năng lực sử dụng các thuật ngữ về giới hạn.

b) **Nội dung**:

HD 1. NHẬN BIẾT DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN LÀ 0

+ Định nghĩa:

Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn là 0** khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Ví dụ 1. Xét dãy số $u_n = \frac{1}{n^2}$. Giải thích vì sao dãy số này có giới hạn là 0.

Giải

Dãy số có giới hạn là 0, bởi vì $|u_n| = \frac{1}{n^2}$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý khi n đủ lớn.

Chẳng hạn, để $|u_n| < 0,0001$ tức $\frac{1}{n^2} < 10^{-4}$ ta cần $n^2 > 10000 \Leftrightarrow n > 100$. Như vậy, các số hạng của dãy kể từ số hạng thứ 101 đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 0,0001.

Chú ý. Từ định nghĩa dãy số có giới hạn 0, ta có các kết quả sau:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad \forall |q| < 1.$$

$$\bullet \text{ Nếu } |u_n| \leq v_n \quad \forall n \geq 1 \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ thì } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Luyện tập 1. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} = 0$.

HD 2. Nhận biết dãy số có giới hạn hữu hạn

+ Định nghĩa:

Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn là số thực a** khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Ví dụ 2: Xét dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n}$. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Giải :

$$\text{Ta có } u_n - 2 = \frac{2n+1}{n} - 2 = \frac{(2n+1) - 2n}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Do vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Nhận xét: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ khi và chỉ khi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$.

Luyện tập 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3 \cdot 2^n - 1}{2^n}$. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

Vận dụng 1. Một quả bóng cao su được thả từ độ cao $5m$ xuống một mặt sàn. Sau mỗi lần chạm sàn, quả bóng nảy lên độ cao bằng $\frac{2}{3}$ độ cao trước đó. Giả sử rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt sàn và quá trình này tiếp diễn vô hạn lần. Giả sử u_n là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng sau lần nảy lên thứ n . Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0.

c) Sản phẩm: Câu trả lời của học sinh

d) Tổ chức thực hiện:

HDTP1.

Chuyển giao	Trình chiếu nội dung câu hỏi Luyện tập 1, chia lớp thành 4 nhóm HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ, phân công các thành viên trong nhóm
Thực hiện	GV: Cho học sinh thảo luận 5 phút HS: Đọc yêu cầu, trình bày nội dung câu trả lời trên bảng phụ
Báo cáo thảo luận	sơ đồ 1 Nhóm 1 đại diện báo cáo sản phẩm, các nhóm còn lại kiểm tra chéo theo -2-3-4.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các nhóm ; giới thiệu nội dung định nghĩa 1 ; yêu cầu học sinh đọc nội dung định nghĩa ; hướng dẫn viết và đọc kí hiệu Yêu cầu thực hiện câu hỏi 2 và VD 1.

HDTP2

Chuyển giao	Trình chiếu nội dung câu hỏi 2 yêu cầu học sinh hoạt động cặp đôi HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ
Thực hiện	GV: Cho học sinh thảo luận 5 phút HS: Hoàn thành yêu cầu ra giấy nháp hoặc vở ghi
Báo cáo thảo luận	Đại diện hai học sinh lên bảng trình bày kết quả

Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các cặp đôi ; giới thiệu nội dung định nghĩa 2 ; yêu cầu học sinh đọc nội dung định
-------------------------------------	--

	nghĩa 2; hướng dẫn viết và đọc kí hiệu Yêu cầu thực hiện câu hỏi 3
--	---

HDTP3

Chuyển giao	Nêu câu hỏi vận dụng 1, yêu cầu hoạt động cá nhân HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ
Thực hiện	GV: Cho học sinh thực hiện 1 phút HS: Hoàn thành yêu cầu và ghi lại kết quả, nêu dự đoán
Báo cáo thảo luận	Đại diện hai học sinh đứng tại chỗ nêu kết quả, cả lớp thống nhất về kết quả và nhận xét.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	Đánh giá kết quả đạt được, hướng dẫn học sinh đọc và ghi nhớ những giới hạn đặc biệt

II. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

Hoạt động 3. Hình thành quy tắc tính giới hạn.

a) Mục tiêu: Phát biểu và giải thích được định lý về giới hạn hữu hạn của dãy số. Áp dụng định lý tính được giới hạn hữu hạn của dãy số, thái độ nghiêm túc, hợp tác. Phát triển năng lực hợp tác, ra quyết định, giao tiếp, năng lực sử dụng các thuật ngữ về giới hạn.

b) Nội dung:

CH 1: Dãy số có giới hạn đặc biệt, dùng MTCT tính số hạng thứ 10; 100, 1000 và dự đoán giới hạn của các dãy số.

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n = 2 + \frac{1}{n}$; $v_n = 3 - \frac{2}{n}$.

Tính và so sánh: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Tổng quát, ta có các quy tắc tính giới hạn sau đây:

a) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$ thì

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = a + b$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = a - b$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \text{ (nếu } b \neq 0 \text{)}$$

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

Ví dụ 3. (Bài tập 1a) Tìm có: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 - 1}$.

Giải.

Áp dụng các quy tắc tính giới hạn, ta được:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Nhận xét: Để tính giới hạn của dãy số dạng phân thức, ta chia cả tử thức và mẫu thức cho lũy thừa cao nhất của n , rồi áp dụng các quy tắc tính giới hạn.

Luyện tập 3 (Bài tập 1b). Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{n + 1}$.

c) Sản phẩm: Câu trả lời của học sinh

d) Tổ chức thực hiện

HDTP1.

Chuyển giao	Trình chiếu nội dung câu hỏi 1, chia lớp thành 4 nhóm HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ, phân công các thành viên trong nhóm
Thực hiện	GV: Cho học sinh thảo luận 5 phút HS: Đọc yêu cầu, trình bày nội dung câu trả lời trên bảng phụ
Báo cáo thảo luận	sơ đồ 1 Nhóm 1 đại diện báo cáo sản phẩm, các nhóm còn lại kiểm tra chéo theo -2-3-4.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các nhóm ; giới thiệu nội dung định nghĩa 1 ; yêu cầu học sinh đọc nội dung định nghĩa ;hướng dẫn viết và đọc kí hiệu Yêu cầu thực hiện câu hỏi 2 và 3.

HDTP2

Chuyển giao	Trình chiếu nội dung câu hỏi 2,3 yêu cầu học sinh hoạt động cặp đôi HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ
Thực hiện	GV: Cho học sinh thảo luận 5 phút HS: Hoàn thành yêu cầu ra giấy nháp hoặc vở ghi
Báo cáo thảo luận	Đại diện hai học sinh lên bảng trình bày kết quả

Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các cặp đôi ; giới thiệu nội dung định lý ; yêu cầu học sinh đọc nội dung định lý; hướng dẫn viết và đọc kí hiệu Yêu cầu thực hiện câu hỏi luyện tập 3
-------------------------------------	--

HDTP3

Chuyển giao	Nêu câu hỏi luyện tập 3, yêu cầu hoạt động cá nhân HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ
Thực hiện	GV: Cho học sinh thực hiện 1 phút HS: Hoàn thành yêu cầu và ghi lại kết quả, nêu dự đoán
Báo cáo thảo luận	Đại diện hai học sinh đứng tại chỗ nêu kết quả, cả lớp thống nhất về kết quả và nhận xét.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	Đánh giá kết quả đạt được, hướng dẫn học sinh đọc và ghi nhớ những giới hạn đặc biệt

Tiết 2:

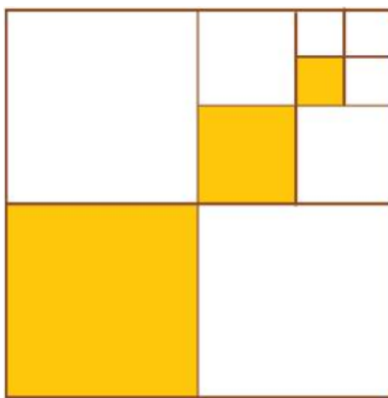
III . TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Hoạt động 4. Làm quen với việc tính tổng vô hạn.

a) Mục tiêu: Nhận ra được cấp số nhân lùi vô hạn, nhớ được công thức tính tổng các số hạng của cấp số nhân lùi vô hạn, áp dụng tính được tổng cụ thể.

b) Nội dung:

Cho hình vuông cạnh 1 (đơn vị độ dài). Chia hình vuông đó thành bốn hình vuông nhỏ bằng nhau, sau đó tô màu hình vuông nhỏ góc dưới bên trái (H.5.2). Lặp lại các thao tác này với hình vuông nhỏ góc trên bên phải. Giả sử quá trình trên tiếp diễn vô hạn lần. Gọi $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ lần lượt là độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu.



a) Tính tổng $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

b) Tìm $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với công bội q . Khi đó $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.

Vì $|q| < 1$ nên $q^n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Do đó, ta có:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{u_1}{1-q} - \left(\frac{u_1}{1-q} \right) q^n \right] = \frac{u_1}{1-q}$$

Giới hạn này được gọi là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , và kí hiệu là $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

Như vậy $S = \frac{u_1}{1-q} \quad (|q| < 1)$.

Ví dụ 4. Tính tổng
 $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$

Giải.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và $q = -\frac{1}{2}$.

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

Do đó

Ví dụ 5. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,222\dots$ dưới dạng phân số.

Giải.

Ta có $2,222\dots = 2 + 0,2 + 0,02 + 0,002 + \dots = 2 + 2 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + \dots$

$$2,222\dots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{2}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{20}{9}$$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 2, q = 10^{-1}$.

c) Sản phẩm : Câu trả lời của HS

d) Tổ chức thực hiện

Chuyển giao	GV : Nêu nội dung bài toán, yêu cầu thực hiện cá nhân HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ
-------------	--

Thực hiện	GV: Cho học sinh thảo luận 2 phút HS: Hoàn thành yêu cầu ra nháp hoặc vở
Báo cáo thảo luận	Đứng tại chỗ trả lời câu hỏi
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các nhóm ; giới thiệu khái niệm cấp số nhân lùi và hướng dẫn tính tổng. Yêu cầu học sinh hoàn thiện bài toán vào vở.

IV. Giới hạn vô cực

Hoạt động 5

a) Mục tiêu: Phát biểu được định nghĩa giới hạn vô cực của dãy số, nhớ được một vài giới hạn đặc biệt và quy tắc tính giới hạn vô cực. Rèn kỹ năng tính toán, tư duy logic, thái độ hợp tác, năng lực sử dụng thuật ngữ về giới hạn, năng lực giao tiếp.

b) Nội dung

+ Định nghĩa:

- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.
- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

+ Theo định nghĩa trên, ta có:

- +) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$, với k là số nguyên dương;
- +) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$, với $q > 1$.

Liên quan đến giới hạn vô cực của dãy số, ta có một số quy tắc sau đây:

- Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (hoặc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$) thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$.

Ví dụ. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2n)$.

Lời giải

Ta có $n^2 - 2n = n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)$. Hơn nữa $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1$.

Do đó, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2n) = +\infty$.

Luyện tập 5. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n})$.

c, Sản phẩm: Câu trả lời của HS

d) Tổ chức thực hiện

HĐTP1.

Chuyển giao	GV : Nêu nội dung bài toán, yêu cầu thực hiện cá nhân HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ
Thực hiện	GV: Cho học sinh thảo luận 2 phút HS: Thảo luận cặp đôi, hoàn thành yêu cầu ra nháp hoặc vở

Báo cáo thảo luận	Đứng tại chỗ trả lời câu hỏi
--------------------------	------------------------------

Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các nhóm ; giới thiệu định nghĩa về giới hạn vô cực. Cho học sinh đọc Định nghĩa SGK, giải thích thuật ngữ, cách ghi kí hiệu. . Để tính giới hạn vô cực ta thừa nhận một số giới hạn đặc biệt và nội dung định lý (SGK)
-------------------------------------	---

HDTP2.

Chuyển giao	GV : Nêu nội dung ví dụ, chia lớp thành 4 nhóm HS: Nghe, quan sát và nhận nhiệm vụ
Thực hiện	GV: Cho học sinh thảo luận 5 phút, gợi ý, biến đổi công thức của dãy số về dạng thuận lợi cho việc dùng các giới hạn đặc biệt và nội dung định lý (Chú ý định lý chỉ áp dụng được khi một dãy có giới hạn hữu hạn, dãy còn lại có giới hạn vô cực) HS: Nhóm 1,2 thực hiện nội dung a1,b1 ; nhóm 3,4 thực hiện nội dung a2.b2, trình bày câu trả lời ra bảng phụ
Báo cáo thảo luận	Đại diện nhóm 2,4 lên bảng trình bày kết quả, nhóm 1,3 kiểm tra chéo kết quả của nhóm 2,4
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV : Nhận xét thái độ làm việc, kết quả đạt được của các nhóm , chú ý những biến đổi thường dùng để đưa các dãy số về dạng có thể áp dụng được định lý Yêu cầu học sinh hoàn thiện bài toán vào vở.

V. Hoạt động 6: LUYỆN TẬP(Giải BT SGK -109)

a) Mục tiêu: HS biết áp dụng các kiến thức về giới hạn dãy số và kiến thức về dãy số làm được các bài tập liên quan.

b) Nội dung:

Phiếu học tập

5.2. Cho hai dãy số không âm (u_n) và (v_n) với $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2}{v_n - u_n}$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n + 2v_n}$.

5.3. Tìm giới hạn của các dãy số cho bởi:

a) $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n - 1}$ b) $v_n = \sqrt{2n^2 + 1} - n$.

5.4. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số:

a) $1,(12) = 1,121212\dots$; b) $3,(102) = 3,102102102\dots$

5.5. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150mg . Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cun trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

c) Sản phẩm: học sinh thể hiện trên bảng nhóm kết quả bài làm của mình

d) Tổ chức thực hiện

Chuyển giao	GV: Chia lớp thành 4 nhóm. Phát phiếu học tập HS: Nhận nhiệm vụ,
Thực hiện	GV: điều hành, quan sát, hỗ trợ HS: 4 nhóm tự phân công nhóm trưởng, hợp tác thảo luận thực hiện

	nhiệm vụ. Ghi kết quả vào bảng nhóm.
Báo cáo thảo luận	Đại diện nhóm trình bày kết quả thảo luận Các nhóm khác theo dõi, nhận xét, đưa ra ý kiến phản biện để làm rõ hơn các vấn đề
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của các nhóm học sinh, ghi nhận và tuyên dương nhóm học sinh có câu trả lời tốt nhất. Hướng dẫn HS chuẩn bị cho nhiệm vụ tiếp theo

Hướng dẫn giải

Bài 5.2 Cho hai dãy số không âm (u_n) và (v_n) với $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$. Tìm các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2}{v_n - u_n}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n + 2v_n}.$$

Giải:

$$\text{a, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2}{v_n - u_n} = \frac{\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right)^2}{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n} = \frac{2^2}{3-2} = 4;$$

$$\text{b, } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 2v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2 - 2 \cdot 3 = -4 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n - 2v_n} = \sqrt{-4} = 2\sqrt{2}$$

Bài 5.3

5.3. Tìm giới hạn của các dãy số cho bởi:

$$\text{a) } u_n = \frac{n^2 + 1}{2n - 1} \quad \text{b) } v_n = \sqrt{2n^2 + 1} - n.$$

Giải:

$$\text{a, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{2n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n}} = \dots = +\infty$$

$$\text{b, } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2n^2 + 1} - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2n^2 + 1} - n)(\sqrt{2n^2 + 1} + n)}{(\sqrt{2n^2 + 1} + n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^2 + 1)}{(\sqrt{2n^2 + 1} + n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}} + \frac{1}{n}} = +\infty$$

Bài 5.4 : Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số:

$$\text{a) } 1,(12) = 1,121212\dots;$$

$$\text{b) } 3,(102) = 3,102102102\dots$$

Lời giải:

a) Ta có: $1,(12) = 1,121212... = 1 + 0,12 + 0,0012 + 0,000012 + ...$

$$= 1 + 12 \cdot 10^{-2} + 12 \cdot 10^{-4} + 12 \cdot 10^{-6} + ...$$

$$= 1 + 12 \cdot (10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + ...)$$

Do $10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + ...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 10^{-2}$ và $q = 10^{-2}$ nên

$$10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + ... = 10^{-2} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-2}} = 10^{-2} \cdot \frac{100}{99} = \frac{100}{99} \cdot 10^{-2} = \frac{100}{99} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{99}$$

$$\text{Vậy } 1,(12) = 1 + 12 \cdot \frac{1}{99} = 1 + \frac{12}{99} = 1 + \frac{4}{33} = \frac{33}{33} + \frac{4}{33} = \frac{37}{33}$$

b) Ta có: $3,(102) = 3,102102102... = 3 + 0,102 + 0,000102 + 0,000000102 + ...$

$$= 3 + 102 \cdot 10^{-3} + 102 \cdot 10^{-6} + 102 \cdot 10^{-9} + ...$$

$$= 3 + 102 \cdot (10^{-3} + 10^{-6} + 10^{-9} + ...)$$

Do $10^{-3} + 10^{-6} + 10^{-9} + ...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 10^{-3}$ và $q = 10^{-3}$ nên

$$10^{-3} + 10^{-6} + 10^{-9} + ... = 10^{-3} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-3}} = 10^{-3} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{1000}{999} \cdot 10^{-3} = \frac{1000}{999} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{999}$$

$$\text{Vậy } 3,(102) = 3 + 102 \cdot \frac{1}{999} = 3 + \frac{102}{999} = 3 + \frac{34}{333} = \frac{999}{333} + \frac{34}{333} = \frac{1033}{333}$$

Bài 5.5 : Một bệnh nhân hằng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Lời giải:

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày đầu tiên là 150 mg.

Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%.

Do đó, lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ hai là

$$150 + 150 \cdot 5\% = 150(1 + 0,05).$$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ ba là

$$150 + 150(1 + 0,05) \cdot 5\% = 150 + 150(0,05 + 0,05^2) = 150(1 + 0,05 + 0,05^2)$$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ tư là

$$150 + 150(1 + 0,05 + 0,05^2) \cdot 5\% = 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3)$$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ năm là

$$150 + 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3) \cdot 5\% = 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4) = 157,8946875 \text{ (mg)}.$$

Cứ tiếp tục như vậy, ta ước tính lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài là $S = 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + ...)$

Lại có $1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + ...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 0,05$.

$$\text{Do đó, } 1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + ... = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - 0,05} = \frac{20}{19}$$

$$\text{Suy ra } S = 150 \cdot \frac{20}{19} = \frac{4000}{19}.$$