Trường THPT Đỗ Đăng Tuyển
Giáo viên: Võ Thị Hoài Thu
Tuần: 21, 22

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Môn học: Toán; lớp:11.
Thời gian thực hiện: 2 tiết (63,64)

I. Mục tiêu.

1. Về kiến thức

- Định nghĩa về góc giữa hai đường thẳng, cách xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian.
- Định nghĩa về hai đường thẳng vuông góc trong không gian.

2. Về năng lực

- Năng lực mô hình hóa toán học: dựng hình mô tả các yếu tố đường thẳng, mặt phẳng, các hình đa diện trong bài toán
- Năng lực giao tiếp toán học: trình bày, diễn đạt, nêu câu hỏi, trả lời câu hỏi, thảo luận, tranh luận để tìm được kết quả chính xác.
- Năng lực tư duy và lập luận toán học: biết phân tích, tổng hợp tìm ra hướng giải bài toán, sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp, suy diễn để trình bày lời giải.
- Sử dụng công cụ và phương tiện học toán: sử dụng thước kẻ, các dụng cụ vẽ hình.

3. Về phẩm chất:

- Độc lập: Biết cách học độc lập với phương pháp thích hợp.
- Trách nhiệm: Biết chia sẻ, có trách nhiệm với bản thân, gia đình, cộng đồng.
- Chăm chỉ: Người học chăm chỉ trong học tập.
- Thế giới quan khoa học: Hiểu được nguồn gốc thực tiễn và khả năng ứng dụng của góc giữa hai đường thẳng trong không gian

II. Thiết bị dạy học và học liệu

- Giáo viên: KHBD, thước kẻ, phấn màu, máy chiếu.
- Học sinh: Bút màu, bút chì, thước kẻ

III. Tiến trình dạy học.

** Hoạt động khởi động*

a. Mục tiêu: Học sinh biết cách xác định góc giữa hai đường thẳng bằng việc dựng hai đường thẳng mới lần lượt song song với hai đường thẳng ban đầu và cùng đi qua một điểm bất kì

b. Nội dung:

HĐ1. Trong không gian cho hai đường thẳng chéo nhau *m* và *n*. Từ hai điểm phân biệt O, O' tùy ý lần lượt kẻ các cặp đường thẳng *a, b* và a', b' tương ứng song song với *m, n* (H7.2).

a) Mỗi cặp đường thẳng a, a' và b, b' có cùng thuộc một mặt phẳng hay không?

b) Lấy các điểm *A, B* (khác *O*) tương ứng thuộc *a, b*. Đường thẳng qua *A* song song với OO' cắt a' tại A', đường thẳng qua *B* song song với OO' cắt b' tại B'. Giải thích vì sao $OAA'O'$, $OBB'O'$, $ABB'A'$ là các hình bình hành.

c) So sánh góc giữa hai đường thẳng *a, b* và góc giữa hai đường thẳng a' và b'.

(Gợi ý: Áp dụng định lí côsin cho các tam giác *OAB*, $O'A'B'$)

c. Sản phẩm:

a) Mỗi cặp đường thẳng a, a' và b, b' đều cùng thuộc một mặt phẳng do chúng song song với nhau theo từng cặp.

b) $OAA'O'$, $OBB'O'$, $ABB'A'$ là các hình bình hành do chúng có các cặp cạnh đối song song với nhau (theo cách dựng).

c) Vì $OAA'O'$, $OBB'O'$, $ABB'A'$ là các hình bình hành nên có $OA = O'A'$, $OB = OB'$ và $AB = A'B'$. Áp dụng định lí côsin cho các tam giác *OAB*, $O'A'B'$ với góc O và O' thì ta có $O = O'$ nên góc giữa hai đường thẳng *a, b* và góc giữa hai đường thẳng a' và b' bằng nhau.

d. Tổ chức thực hiện:

Chuyển giao	Giáo viên nêu yêu cầu bài toán như nội dung (và trình chiếu cách dựng các điểm O, O' và các đường thẳng *m* và *n* ; *a*, *b* và a', b')
Thực hiện	Học sinh quan sát thảo luận (theo cá nhân hoặc đại diện mỗi nhóm.)
Báo cáo thảo luận	Học sinh trả lời, thảo luận, hoàn thiện sản phẩm.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV nhận xét các câu trả lời. Giáo viên giới thiệu khái niệm và cách xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian

**Hình thành kiến thức*

2. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

2.1. Hình thành kiến thức

a. Mục tiêu: Học sinh nắm được định nghĩa về góc giữa hai đường thẳng trong không gian

b. Nội dung:

- Định nghĩa và chú ý về góc giữa hai đường thẳng

Nếu *a* song song hoặc trùng với a' và *b* song song hoặc trùng với b' thì (a,b) và (a',b') có mối quan hệ gì?

c. Sản phẩm:

Góc giữa hai đường thẳng *m* và *n* trong không gian, kí hiệu (*m*, *n*), là góc giữa hai đường thẳng *a* và *b* cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với *m* và *n*.

Chú ý

- Để xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau *a* và *b*, ta có thể lấy một điểm *O* thuộc đường thẳng *a* và qua đó kẻ đường thẳng b' song song với *b*. Khi đó $(a,b)=(a,b')$.
- Với hai đường thẳng *a*, *b* bất kì: $0^0 \le (a,b) \le 90^0$.

Nếu *a* song song hoặc trùng với a' và *b* song song hoặc trùng với b' thì $(a,b)=(a',b')$

d. Thực hiện:

Chuyển giao	Giáo viên yêu cầu HS tìm hiểu về định nghĩa và chú ý về góc giữa hai đường thẳng trong SGK và trình bày nội dung định nghĩa thông qua hình ảnh của hoạt động khởi động
Thực hiện	Học sinh tìm hiểu và trình bày
Báo cáo thảo luận	Học sinh trả lời câu hỏi
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV chuẩn hóa kiến thức

2.2. Luyện tập

a. Mục tiêu: Học sinh biết cách xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian

b. Nội dung:

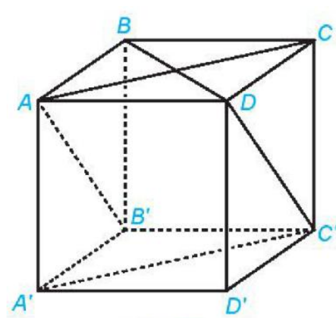
Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt là hình vuông. Tính các góc (AA',CD), $(A'C',BD)$, (AC,DC').

c. Sản phẩm:

Vì $CD//AB$ nên $(AA',CD)=(AA',AB)=90^0$. Tứ giác $ACC'A'$ có các cặp cạnh đối bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó $A'C'//AC$. Vậy $(A'C',BD)=(AC,BD)=90^0$.

Tương tự, $DC'//AB'$. Vậy $(AC,DC')=(AC,AB')$.

Tam giác $AB'C$ có ba cạnh bằng nhau (vì là các đường chéo của các hình vuông có độ dài cạnh bằng nhau) nên



Hình 7.3

nó là một tam giác đều. Từ đó, $(AC, DC') = (AC, AB') = 60^0$.

d. Thực hiện:

Chuyển giao	Giáo viên nêu nội dung và yêu cầu bài toán
Thực hiện	Học sinh thực hiện theo nhóm
Báo cáo thảo luận	Học sinh trả lời, thảo luận, hoàn thiện sản phẩm.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV chuẩn hóa kiến thức, chốt cách xác định góc giữa hai đường thẳng thông qua việc xác định góc giữa hai đường thẳng song song với hai đường thẳng ban đầu

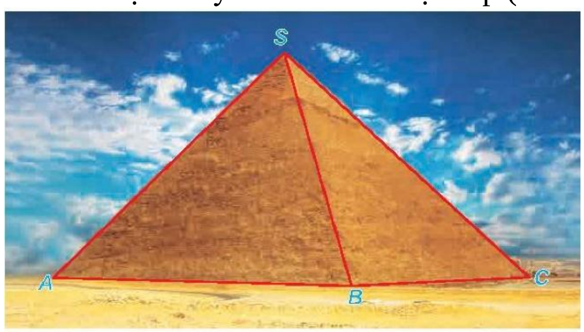
2.3. Vận dụng

a. Mục tiêu: Học sinh hiểu được việc xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian là một việc làm xuất phát từ thực tiễn và nhu cầu của cuộc sống

b. Nội dung:

Vận dụng. Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng $230m$, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng $219m$ (kích thước hiện nay). (Theo *britannica.com*).

Tính gần đúng góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (H.7.4).



Hình 7.4

c. Sản phẩm:

Do $AB//CD$ nên $(SC, AB) = (SC, CD) = SCD$.

Áp dụng hệ quả định lí côsin trong tam giác SCD ta có:

$$\cos C = \frac{CD^2 + SC^2 - SD^2}{2.CD.SC} = \frac{CD}{2.SC} = \frac{230}{2.219} = \frac{115}{219}$$

Suy ra $(SC, AB) = C \approx 58^0 19'$

d. Thực hiện:

Chuyển giao	Giáo viên nêu nội dung và yêu cầu bài toán
Thực hiện	Học sinh thực hiện theo cá nhân hoặc nhóm
Báo cáo thảo luận	Học sinh trả lời, thảo luận, hoàn thiện sản phẩm.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV chuẩn hóa kiến thức, chốt cách tìm góc giữa hai đường thẳng thông qua định lí côsin trong tam giác.

3. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

3.1. Khởi động

a. Mục tiêu: Củng cố cách xác định góc giữa hai đường thẳng, hiểu được hai đường thẳng vuông góc là một trường hợp đặc biệt cần được xác định trong thực tiễn.

b. Nội dung:

HĐ2: Đối với hai cánh cửa trong Hình 7.5, tính góc giữa hai đường mép của BC và MN.

Hình 7.5

c. Sản phẩm:

Có $BC // NP$ nên $\left(BC, MN\right) = \left(NP, MN\right) = MNP = 90^0$

3.2. Hình thành kiến thức

a. Mục tiêu: Học sinh nắm được khái niệm hai đường thẳng vuông góc

b. Nội dung:

- Định nghĩa về hai đường thẳng vuông góc

Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b thì a có vuông góc với các đường thẳng song song với b hay không?

c. Sản phẩm:

Hai đường thẳng *a*, *b* được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $a \perp b$, nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b thì a vuông góc với mọi đường thẳng song song với *b*. Vì giả sử b' là một đường thẳng bất kì song song với *b*, khi đó theo cách xác định góc giữa hai đường thẳng ta có: $\left(a, b'\right) = \left(a, b\right) = 90^0$.

d. Thực hiện:

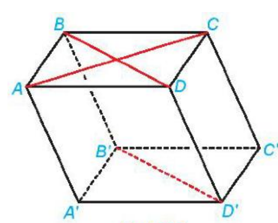
Chuyển giao	Giáo viên nêu định nghĩa và nội dung câu hỏi
Thực hiện	Học sinh ghi nhớ, tìm hiểu và trình bày lời giải câu hỏi
Báo cáo thảo luận	Học sinh trả lời câu hỏi
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV chuẩn hóa kiến thức

3.3. Luyện tập

a. Mục tiêu: Củng cố các kiến thức về cách xác định góc giữa hai đường thẳng, chứng minh được hai đường thẳng vuông góc trong không gian

b. Nội dung:

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (H.7.6)

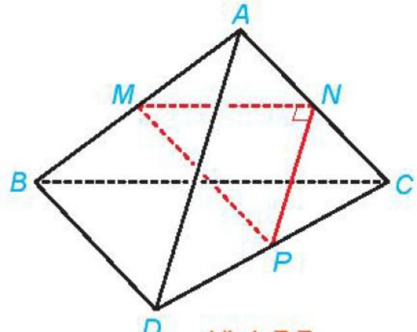


Hình 7.6

a) Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AC và $B'D'$.

b) Chứng minh rằng AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình thoi.

Luyện tập 1. Cho tam giác MNP vuông tại N và một điểm A nằm ngoài mặt phẳng $\left(MNP\right)$. Lần lượt lấy các điểm B, C, D sao cho M, N, P tương ứng là trung điểm của AB, AC, CD (H.7.7). Chứng minh rằng AD và BC vuông góc với nhau và chéo nhau.



Hình 7.7

c. Sản phẩm:

Ví dụ 2.

a) Hai đường thẳng AC và $B'D'$ lần lượt hai mặt phẳng song song $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ nên chúng không có điểm chung, tức là chúng không thể trùng nhau hoặc cắt nhau.
Tứ giác $BDD'B'$ có hai cạnh đối BB' và DD' song song và bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó $B'D'$ song song với BD. Mặt khác, BD không song song với AC nên $B'D'$ không song song với AC.
Từ những điều trên suy ra AC và $B'D'$ chéo nhau.

b) Do $B'D'$ song song với BD nên $(AC, B'D') = (AC, BD)$. Do đó, AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi AC và BD vuông góc với nhau. Do $ABCD$ là hình bình hành nên AC vuông góc với BD khi và chỉ khi $ABCD$ là hình thoi.

Luyện tập 1. Do N và P lần lượt là trung điểm của AC và CD nên NP là đường trung bình của tam giác CAD, suy ra $AD // NP$ (1).
Do M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $BC // MN$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $(AD, BC) = (NP, MN) = MNP = 90^0$, hay $AD \perp BC$.
Hơn nữa nếu AD và BC đồng phẳng thì do M, N, P lần lượt nằm trên AB, AC và DC nên tất cả các điểm A, B, C, D, M, N, P đều cùng thuộc mặt phẳng, mâu thuẫn với giả thiết A nằm ngoài mặt phẳng (MNP). Vậy AD và BC không đồng phẳng, hay chúng chéo nhau.

d. Thực hiện:

Chuyển giao	Giáo viên yêu cầu HS tìm hiểu ví dụ 2 với các câu hỏi liên quan về cách xác định góc giữa hai đường thẳng và đặc tính về hai đường chéo của một số hình vuông, hình bình hành, hình thoi đã học; Tổ chức thực hiện luyện tập 1
Thực hiện	Học sinh trả lời câu hỏi thuộc ví dụ 2 (cá nhân) và thực hiện hoạt động luyện tập 1 theo nhóm
Báo cáo thảo luận	Học sinh trả lời, thảo luận, hoàn thiện sản phẩm.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV chuẩn hóa kiến thức

**) Hoạt động luyện tập và vận dụng*

a. Mục tiêu: Rèn luyện các kỹ năng từ đó củng cố lại các kiến thức đã được học trong bài học. Vận dụng các kiến thức đã học giải quyết bài toán trong thực tế.

b. Nội dung:

*** Nhiệm vụ 1: Luyện tập để củng cố các kiến thức** (bài 7.1; 7.2; 7.3 SGK)

*** Nhiệm vụ 2: Bài tập trắc nghiệm phiếu học tập số 2** (xem phiếu bài tập tại phần phụ lục)

*** Nhiệm vụ 3: Bài tập vận dụng** (bài 7.4 SGK)

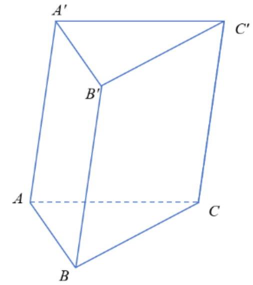
c. Sản phẩm:

*** Nhiệm vụ 1, 3:**

Hướng dẫn giải:

7.1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các đáy là các tam giác đều. Tính góc $\left(AB, B'C'\right)$.

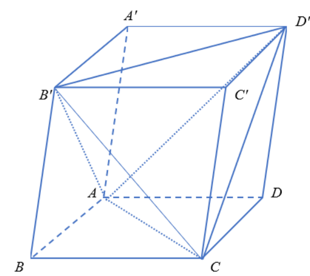
Giải



Ta có: $\left(AB, B'C'\right) = \left(AB, BC\right) = 60°$

7.2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng tứ diện $ACB'D'$ có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

Giải



Theo giả thiết, hình hộp có tất cả các cạnh bằng nhau nên các mặt của hình hộp là hình thoi, mặt khác 2 đường chéo của mỗi hình thoi thì vuông góc với nhau.

Tứ diện $ACB'D'$ có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau, thật vậy:

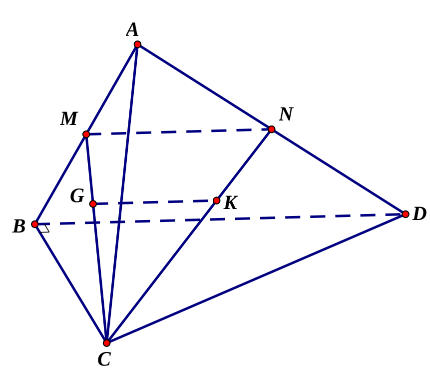
$\left(AC, B'D'\right) = \left(AB, BD\right) = 90° \Rightarrow AC \perp B'D'$, tương tự ta chứng minh được hai cặp cạnh đối diện còn lại vuông góc với nhau.

7.3. Cho tứ diện $ABCD$ có $CBD = 90^{\circ}$.

a) Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, AD. Chứng minh rằng MN vuông góc với BC

b) Gọi G, K tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD. Chứng minh rằng GK vuông góc với BC.

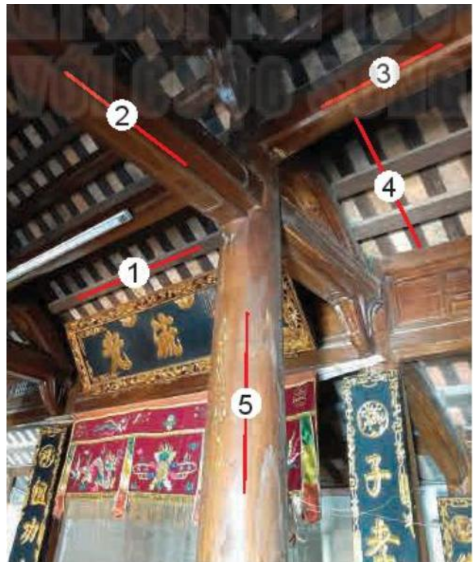
Giải



a) Theo giả thiết suy ra MN là đường trung bình của tam giác $\triangle ABD$ nên $MN // BD$. Do đó $\left(MN, BC\right) = \left(BD, BC\right) = 90° \Rightarrow MN \perp BC$

b) Từ giả thiết, ta suy ra: $\dfrac{CG}{CM}=\dfrac{CK}{CN}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow GK//MN\Rightarrow (GK,BC)=(MN,BC)=90^\circ\Rightarrow GK\perp BC$

7.4. Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện hoành, quá giang, xà cái, rui, cột tương ứng được đánh số $1,2,3,4,5$ như trong Hình 7.8, những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?



Giải

Các cặp cấu kiện vuông góc với nhau lần lượt là: 1 với các đường 2, 4, 5; 2 với 3, 5; 3 với 4, 5

*** Nhiệm vụ 2:** Câu trả lời của học sinh (xem phiếu bài tập tại phần phụ lục)

d. Tổ chức thực hiện:

Chuyển giao	- Nhiệm vụ 1: GV: Chia lớp thành 4 nhóm, yêu cầu nhóm 1 bài tập 7.1; Nhóm 2 làm bài tập 7.2 ; Nhóm 3, 4 làm bài tập 7.3. -Nhiệm vụ 2: tất cả các nhóm đưa ra phương án lựa chọn của nhóm mình. - Nhiệm vụ 3: GV và HS phối hợp phân tích thực hiện bài tập vận dụng (HS lên bảng làm)
Thực hiện	GV: tổ chức cho học sinh ngồi theo nhóm, điều hành, quan sát, hướng dẫn và hỗ trợ cho học sinh (nếu có) HS: thực hiện theo nhóm đã phân công
Báo cáo thảo luận	HS nộp sản phẩm (lời giải các bài tập cho GV), đại diện các nhóm lần lượt lên bảng trình bày lời giải, các nhóm còn lại thảo luận, nhận xét, sửa chữa (nếu có)
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của các nhóm học sinh, ghi nhận và tuyên dương nhóm học sinh có câu trả lời tốt nhất.

PHỤ LỤC HỒ SƠ DẠY HỌC

II. Bài tập bổ sung: ***(Dùng cho học sinh tự luyện, dạy phụ đạo - số lượng 10 câu TN, 10 câu tự luận)***

A. Phần trắc nghiệm (5 câu mức nhận biết, 5 câu thông hiểu):

*** Nhận biết**

Bài 1. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

Lời giải

Chọn D

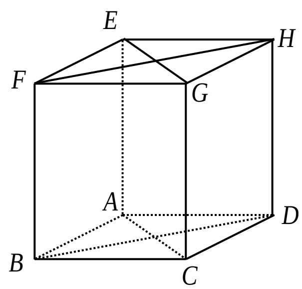
Đường thẳng Δ_1 có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1$

Đường thẳng Δ_2 có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_2$

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\vec{v}$

$$\begin{cases}\Delta_1 // \Delta_2 \\ d \perp \Delta_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \text{ cuøng phöông} \\ \vec{v}.\overrightarrow{u_1} = 0\end{cases} \Rightarrow \vec{v}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Rightarrow d \perp \Delta_2$$

Bài 2. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?



A. $90°$.
B. $60°$.
C. $45°$.
D. $120°$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $EG//AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = BAC = 45°$.

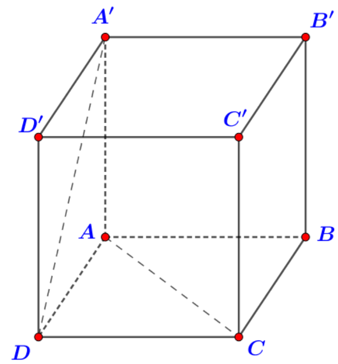
Bài 3: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).
B. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c
C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.
D. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véctơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

Hướng dẫn giải:

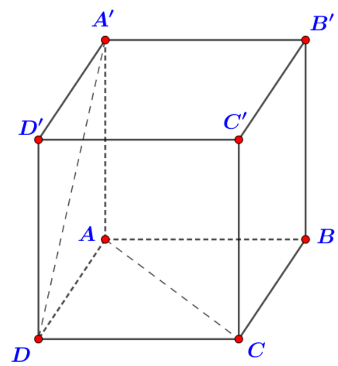
Chọn A.

Bài 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ bằng



A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

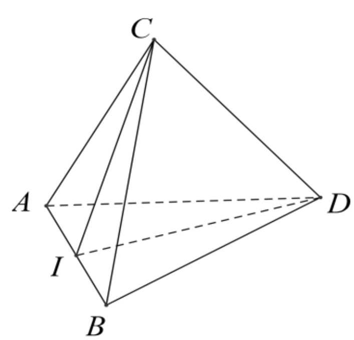
Bài 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng $A'B'$ và DD' bằng



A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

*** Thông hiểu**

Bài 6: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Góc giữa AB và CD là?



A. 120°. **B.** 60°.
C. 90°. **D.** 30°.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi I là trung điểm của AB

Vì ABC và ABD là các tam giác đều

Nên $\begin{cases} CI \perp AB \\ DI \perp AB \end{cases}$.

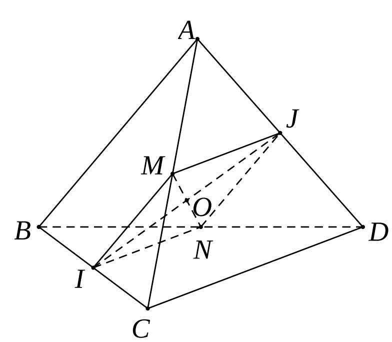
Suy ra $AB \perp (CID) \Rightarrow AB \perp CD$.

Bài 7: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $IJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BC.

Ta có:

$$\begin{cases} MI = NI = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{a}{2} \\ MI \,//\, AB \,//\, CD \,//\, NI \end{cases} \Rightarrow MINJ \text{ là hình thoi.}$$

Gọi O là giao điểm của MN và IJ.

Ta có: $MIN = 2MIO$.

Xét ΔMIO vuông tại O, ta có: $\cos MIO = \frac{IO}{MI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MIO = 30° \Rightarrow MIN = 60°$.

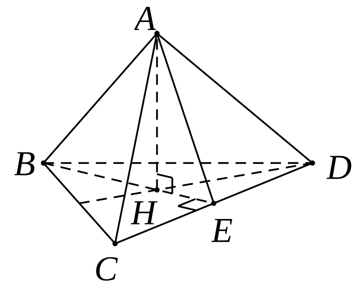
Mà: $(AB, CD) = (IM, IN) = MIN = 60°$.

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$ (Tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCD \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Gọi E là trung điểm CD $\Rightarrow BE \perp CD$ (do ΔBCD đều).

Do $AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp CD$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp BE \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp AB \Rightarrow (AB, CD) = 90°$.

Bài 9: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

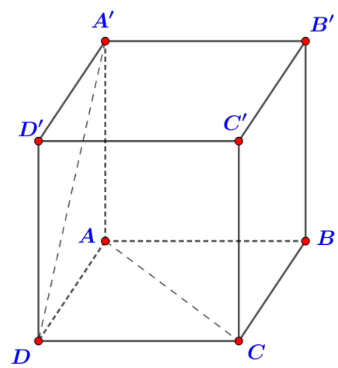
A. $45°$ **B.** $90°$ **C.** $120°$ **D.** $60°$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$\left.\begin{matrix} AB \perp AE \\ AE // DH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp DH \Rightarrow (AB, DH) = 90°$

Bài 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng



A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

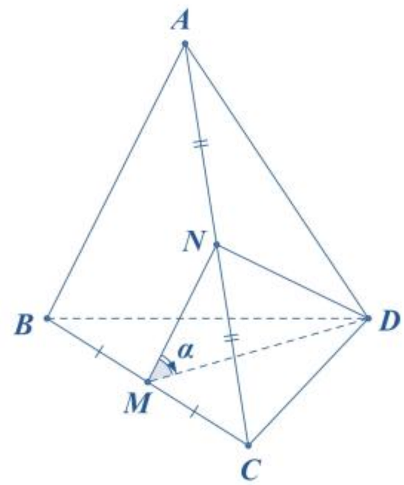
****Đáp án:***

Mức độ	Nhận biết					Thông hiểu				
Câu	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Đáp án	**D**	**C**	**A**	**A**	**D**	**C**	**C**	**D**	**B**	**C**

B. Phần tự luận (mức vận dụng):

Câu 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, M là trung điểm của cạnh BC. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và DM, tính $\cos\alpha$.

Lời giải:



Gọi N là trung điểm của AC

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} MN // AB \\ MN = \frac{1}{2} AB \end{cases}$$

Vì ΔBCD và ΔACD là các tam giác đều cạnh bằng a

$$\Rightarrow MD = ND = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vì $MN // AB \Rightarrow \alpha = \left(AB, DM\right) = \left(MN, DM\right)$

Xét ΔMND, ta có:

$$\cos NMD = \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2MN.MD}$$

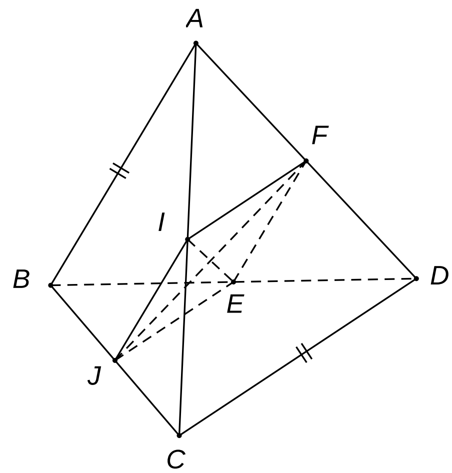
$$= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

$$\Rightarrow NMD < 90° \Rightarrow \left(MN, DM\right) = NMD$$

Vậy $\cos\alpha = \cos NMD = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Tính số đo góc $\left(IE, JF\right)$.

Lời giải



Ta có IF là đường trung bình của ΔACD $\Rightarrow \begin{cases} IF \,//\, CD \\ IF = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$.

Lại có JE là đường trung bình của ΔBCD $\Rightarrow \begin{cases} JE \,//\, CD \\ JE = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} IF = JE \\ IF \,//\, JE \end{cases}$ $\Rightarrow$ Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác: $\begin{cases} IJ = \dfrac{1}{2}AB \\ JE = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$. Mà $AB = CD \Rightarrow IJ = JE$.

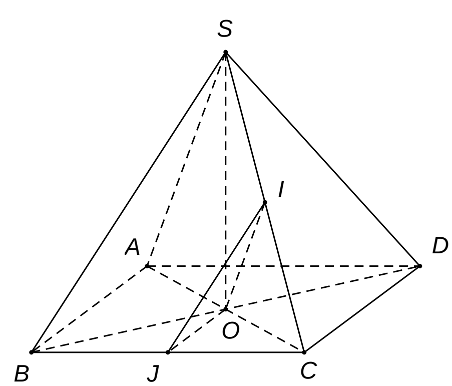
Do đó $IJEF$ là hình thoi. Suy ra $(IE, JF) = 90°$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. $90°$.. **B.** $45°$.. **C.** $30°$.. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD \Rightarrow OJ$ là đường trung bình của ΔBCD.

Suy ra $\begin{cases} OJ // CD \\ OJ = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$.

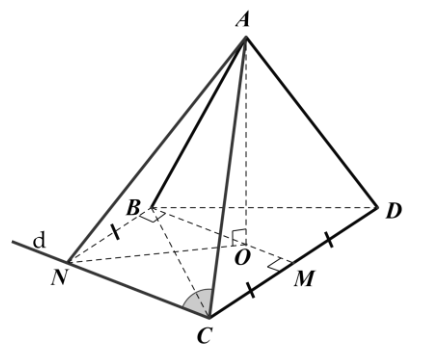
Vì $CD // OJ \Rightarrow (IJ, CD) = (IJ, OJ)$.

Xét tam giác IOJ, có $\begin{cases} IJ = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a}{2} \\ OJ = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{a}{2} \\ IO = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta IOJ$ đều.

Vậy $(IJ, CD) = (IJ, OJ) = IJO = 60°$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm CD, α là góc giữa AC và BM. Tính $\cos\alpha$.

Hướng dẫn giải:



Gọi O là trọng tâm của ΔBCD $\Rightarrow AO \perp (BCD)$

Trên đường thẳng d qua C và song song BM lấy điểm N sao cho $BMCN$ là hình chữ nhật, từ đó suy ra: $\left(AC, BM\right) = \left(AC, CN\right) = \left(ACN\right) = \alpha$

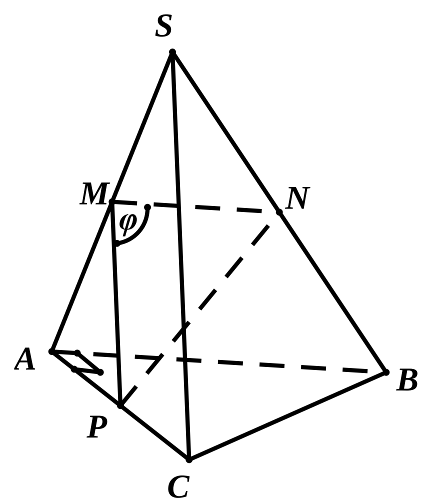
Có: $CN = BM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ và $BN = CN = \dfrac{a}{2}$

$AO^2 = AB^2 - BO^2 = AB^2 - \left(\dfrac{2}{3}BM\right)^2 = \dfrac{2}{3}a^2$

$ON^2 = BN^2 + BO^2 = \dfrac{7}{12}a^2$; $AN = \sqrt{AO^2 + ON^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{AC^2 + CN^2 - AN^2}{2AC.CN} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

Hướng dẫn giải:



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, AC, khi đó $MN \parallel AB$ nên $(AB, SC) = (MN, SC)$.

Đặt $\varphi = NMP$, trong tam giác MNP có

$\cos\varphi = \dfrac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2MN.MP}$ (1).

Ta có $MN = MP = \dfrac{a}{2}$, $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A, vì vậy

$PB^2 = AP^2 + AC^2 = \dfrac{5a^2}{4}$, $PS^2 = \dfrac{3a^2}{4}$. Trong tam giác PBS theo công thứ tính đường trung tuyến ta có

$$PN^2 = \frac{PB^2 + PS^2}{2} - \frac{SB^2}{4} = \frac{\frac{5a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

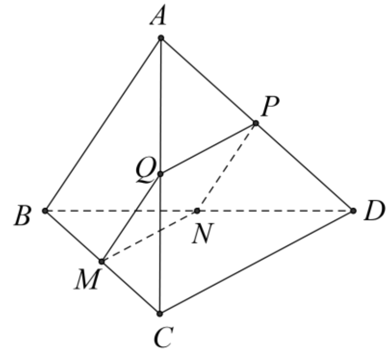
Thay MN, MP, NP vào (1) ta được $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 120^0$.

Vậy $(AB, SC) = (MN, SC) = 60^0$.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=x.BC$ $\left(0<x<1\right)$. mp$\left(P\right)$ song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu ?

Hướng dẫn giải:

Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MQ//NP//AB \\ MN//PQ//CD \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.



Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$.

Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vì $MQ//AB$ nên $\dfrac{MQ}{AB}=\dfrac{CM}{CB}=x \Rightarrow MQ=x.AB=6x$.

Theo giả thiết $MC=x.BC \Rightarrow BM=\left(1-x\right)BC$.

Vì $MN//CD$ nên $\dfrac{MN}{CD}=\dfrac{BM}{BC}=1-x \Rightarrow MN=\left(1-x\right).CD=6\left(1-x\right)$.

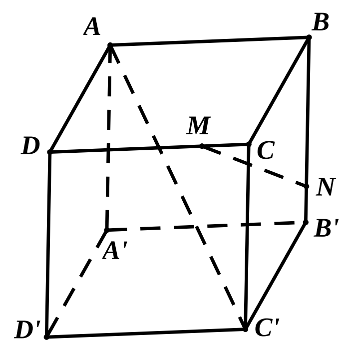
Diên tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$$S_{MNPQ}=MN.MQ=6\left(1-x\right).6x=36.x.\left(1-x\right)\le 36\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2=9.$$

Ta có $S_{MNPQ}=9$ khi $x=1-x \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trên các cạnh DC và BB' lấy các điểm M và N sao cho $MD=NB=x\left(0\le x\le a\right)$. Chứng minh $AC'\perp MN$



Hướng dẫn giải:

Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AD}=\vec{c}$.

a) Ta có $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{B'D'}=\vec{c}-\vec{b}$ nên

$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D'}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$

$=\vec{a}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)+\vec{c}^2-\vec{b}^2=a^2-a^2=0$

$\Rightarrow AC'\perp B'D'$.

b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}\right)=\left(\vec{b}+\dfrac{x}{a}\vec{a}\right)-\left(\vec{c}+\dfrac{x}{a}\vec{b}\right)=\dfrac{x}{a}\vec{a}+\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\vec{b}-\vec{c}$

Từ đó ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)[\left(\vec{b}+\dfrac{x}{a}\vec{a}\right)-\left(\vec{c}+\dfrac{x}{a}\vec{b}\right)=\dfrac{x}{a}\vec{a}+\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\vec{b}-\vec{c}]$

$=\dfrac{x}{a}\vec{a}^2+\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\vec{b}^2-\vec{c}^2=x.a+\left(1-\dfrac{x}{a}\right)a^2-a^2=0$.

Vậy $AC'\perp MN$.

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, CD, AD, BC và AC. Tính góc của hai đường thẳng AB và CD?

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $MC=MD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác MCD cân tại M, do đó $MN\perp CD$.

Lại có $RP \,||\, CD \Rightarrow MN\perp RQ$.

b) Tương tự ta có $QP\perp AD$

Trong tam giác vuông PDQ ta có

$QP^2 = QD^2 - DP^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2}$ Ta có :

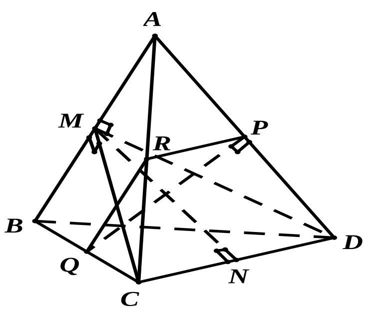
$RQ^2 + RP^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = a^2 = QP^2$

Do đó tam giác RPQ vuông tại R, hay $RP \perp RQ$.

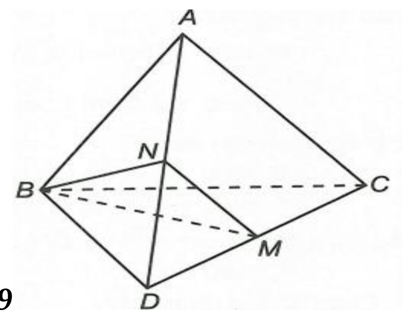
Vì vậy $\begin{cases} AB \parallel RQ \\ CD \parallel RP \\ RP \perp RQ \end{cases} \Rightarrow AB \perp CD$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AD = a$ và $BAC = BAD = 60°, CAD = 90°$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Tính độ dài cạnh AC để côsin góc giữa hai đường thẳng AC và BM bằng $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

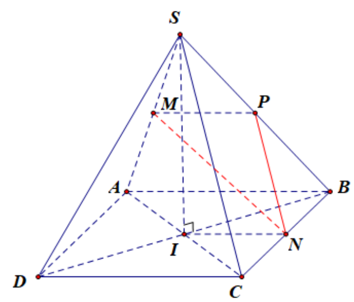
Lời giải



C8



C9



C10

Gọi N là trung điểm của AD. Ta có $(BM, AC) = (BM, MN) = \alpha$

Đặt $AC = 2x \Rightarrow MN = x > 0$

Theo bài ra ta có tam giác ABD đều cạnh a nên $BD = a, BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ACD vuông tại A nên $DC^2 = AD^2 + AC^2 = a^2 + 4x^2$

Xét tam giác ABC ta có $BC^2 = a^2 + 4x^2 - 2ax$

Do đó $BM^2 = \dfrac{a^2 + a^2 + 4x^2 - 2ax}{2} - \dfrac{a^2 + 4x^2}{4} = \dfrac{3a^2 + 4x^2 - 4ax}{4}$

Ta tính $\cos BMN = \dfrac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2BM.MN} = \dfrac{\dfrac{3a^2 + 4x^2 - 4ax}{4} + x^2 - \dfrac{3a^2}{4}}{2.\dfrac{\sqrt{3a^2 + 4x^2 - 4ax}}{2}.x}$

$= \dfrac{8x^2 - 4ax}{4x.\sqrt{3a^2 + 4x^2 - 4ax}} = \dfrac{2x - a}{\sqrt{3a^2 + 4x^2 - 4ax}}$

Theo giả thiết ta có

$\cos\alpha = \left|\dfrac{2x - a}{\sqrt{3a^2 + 4x^2 - 4ax}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 8x^2 - 8ax = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array}\right.$

Do $x > 0$ nên $x = a \Rightarrow AC = 2x = 2a$

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, độ dài cạnh bên cũng bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Góc giữa MN và SC bằng

Lời giải

Gọi P là trung điểm của SB, ta có $SC // NP \Rightarrow (MN, SC) = (MN, NP) = MNP$.

Mà $MP = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$; $NP = \frac{1}{2}SC = \frac{a}{2}$; $MC^2 = \frac{2\left(SC^2 + AC^2\right) - SA^2}{4} = \frac{2\left(a^2 + 2a^2\right) - a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$;

$MB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$MN^2 = \frac{2\left(MC^2 + MB^2\right) - BC^2}{4} = \frac{2\left(\frac{5a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}\right) - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

Do đó $\cos MNP = \frac{NP^2 + MN^2 - MP^2}{2.NP.MN} = \frac{MN}{2NP} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2.\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $MNP = 30^\circ$.