Trường THPT Đỗ Đăng Tuyển
Giáo viên: Võ Thị Hoài Thu
Tuần: 25, 26

KHOẢNG CÁCH

Môn học: Toán; lớp:11.
Thời gian thực hiện: 3 tiết (74,75,76)

I. Mục tiêu.

1. Về kiến thức

- Biết được khái niệm khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong không gian.
- Biết được khái niệm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.
- Biết được khái niệm khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song.
- Biết được khái niệm khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.
- Biết được khái niệm đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.
- Biết được khái niệm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.
- Nắm và trình bày được các tính chất về khoảng cách và biết cách tính khoảng cách trong các bài toán đơn giản.
- Xác định được khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong không gian.
- Xác định được khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.
- Xác định được khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.
- Xác định được khoảng cách giữa hai đường thẳng và mặt phẳng song song.
- Xác định được đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.
- Vận dụng được định lý ba đường vuông góc để xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau, đồng thời biết cách xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.
- Nắm được mối liên hệ giữa các loại khoảng cách để đưa các bài toán phức tạp này về các bài toán khoảng cách đơn giản.

2. Về năng lực

- *Năng lực tự học:* Học sinh xác định đúng đắn động cơ thái độ học tập; tự đánh giá và điềuchỉnh được kế hoạch học tập; tự nhận ra được sai sót và cách khắc phục sai sót.
- *Năng lực giải quyết vấn đề:* Biết tiếp nhận câu hỏi, bài tập có vấn đề hoặc đặt ra câu hỏi. Phân tích được các tình huống trong học tập.
- *Năng lực tự quản lý:* Làm chủ cảm xúc của bản thân trong quá trình học tập vào trong cuộc sống; trưởng nhóm biết quản lý nhóm mình, phân công nhiệm vụ cụ thể cho từng thành viên nhóm, các thành viên tự ý thức được nhiệm vụ của mình và hoàn thành được nhiệm vụ được giao.
- *Năng lực giao tiếp:* Tiếp thu kiến thức trao đổi học hỏi bạn bè thông qua hoạt động nhóm; có thái độ tôn trọng, lắng nghe, có phản ứng tích cực trong giao tiếp.
- *Năng lực hợp tác:* Xác định nhiệm vụ của nhóm, trách nhiệm của bản thân đưa ra ý kiến đóng góp hoàn thành nhiệm vụ của chủ đề.
- *Năng lực sử dụng ngôn ngữ:* Học sinh nói và viết chính xác bằng ngôn ngữ Toán học.

3. Về phẩm chất:

- Rèn luyện tính cẩn thận, chính xác. Tư duy các vấn đề toán học một cách lôgic và hệ thống.
- Chủ động phát hiện, chiếm lĩnh tri thức mới, biết quy lạ về quen, có tinh thần trách nhiệm hợp tác xây dựng cao.
- Chăm chỉ tích cực xây dựng bài, chủ động chiếm lĩnh kiến thức theo sự hướng dẫn của GV.
- Năng động, trung thựcsáng tạo trong quá trình tiếp cận tri thức mới ,biết quy lạ về quen, có tinh thần hợp tác xây dựng cao.
- Hình thành tư duy logic, lập luận chặt chẽ, và linh hoạt trong quá trình suy nghĩ.

II. Thiết bị dạy học và học liệu

- Giáo viên: Bảng vuông, hạt, giấy A0, A4; máy tính và máy chiếu.
- Học sinh: Bút màu, bút chì, máy tính cầm tay.

III. Tiến trình dạy học.

Tiết 1:

HOẠT ĐỘNG KHỞI ĐỘNG

a) Mục tiêu: Xem hình ảnh, từ đó HS hình thành khái niệm khoảng cách giữa hai đối tượng trong không gian để giới thiệu bài mới

b) Nội dung: GV hướng dẫn.

Hình 7.73. Các đầu phun nước cháy sprinkler cần được lắp đặt theo tiêu chuẩn kĩ thuật, trong đó có tiêu chuẩn về khoảng cách tới từng laoij trần, tường, nhà.

H1- Tính khoảng cách từ Hà Nội đến TP HCM?

H2- Tính khoảng cách giữa mặt bàn học và mặt sàn? (giả thiết mặt bàn và mặt sàn song song)

H3- Tính chiều cao của kim tự tháp với gải thiết: Đại kim tự tháp Giza có hình chóp tứ giác đều, cạnh bên dài 231m, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $51,5^\circ$.

H4- Nêu lại điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

c) Sản phẩm

Câu trả lời của HS

L1- Khoảng cách từ Hà Nội đến tp HCM theo vị trí địa lí khoảng 1145 km.

L2- Khoảng cách giữa mặt bàn và mặt sàn bằng khoảng cách từu một điểm bất kì trên mặt bàn đến mặt sàn và bằng 75 cm (giá trị này gv có teher đo thực tế tại lớp học của mình)

L3- Chiều cao của kim tự tháp: Sau phần bài học chúng ta sẽ trả lời được câu hỏi này.

L4- Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng: Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng đó.

d) Tổ chức thực hiện:

****) Chuyển giao nhiệm vụ :*** GV nêu câu hỏi

****) Thực hiện*:** HS suy nghĩ độc lập

1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

1.1. Hoạt động hình thành kiến thức

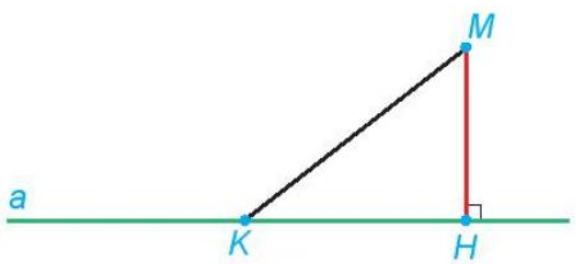
a. Mục tiêu: Học sinh nắm được các khái niệm khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng trong không gian

b. Nội dung:

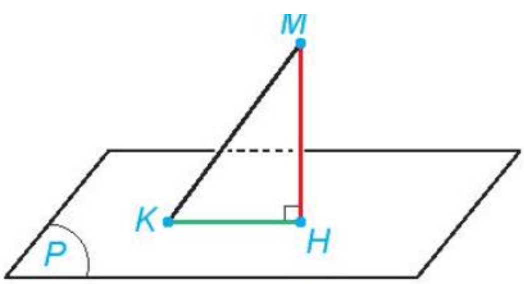
HĐ1:

a) Cho điểm M và đường thẳng a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên a. Với mỗi điểm K thuộc a, giải thích vì sao $MK \ge MH\ (H.7.74)$

b) Cho điểm M và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (P). Với mỗi điểm K thuộc (P), giải thích vì sao $MK \ge MH\ (H.7.75)$



Hình 7.74



Hình 7.75

c. Sản phẩm:

Trả lời câu hỏi HĐ 1:

Vì MK là cạnh hyền của tam giác vuông MHK nên có độ dài lớn hơn độ dài cạnh góc vuông MH.

Dấu “ =” xảy ra khi K trùng H

Khái niệm khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng.

Khoảng cách từ M đến một đường thẳng a, kí hiệu $d(M,a)$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu của M trên a.

Khoảng cách từ M đến một đường thẳng (P), kí hiệu $d(M,(P))$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu của M trên (P).

Nhận xét:

- $d(M,a)=0$ khi và chỉ khi $M\in a, d(M,(P))=0 \Leftrightarrow M\in(P)$
- Khoảng cách từ M đến đường thẳng a (mặt phẳng (P)) là khoảng cách nhỏ nhất giữa M và một điểm thuộc a (thuộc (P)).
- Chú ý .Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là chiều cao của hình chóp đó .

d. Tổ chức thực hiện:

Chuyển giao	- GV vẽ minh họa một điểm và một đường thẳng trong không gian (Hình 7.74) - HS suy nghĩ và tìm câu trả lời cho vị trí điểm H - GV đưa ra câu hỏi: lấy $K\neq H$ bất kì thuộc a ta luôn có MK $\geq$ MH không? Vì sao? - GV vẽ minh họa một điểm và một mặt phẳng trong không gian (Hình 7.75) - HS suy nghĩ và tìm câu trả lời cho vị trí điểm H. - GV đưa ra câu hỏi: lấy $K\neq H$ bất kì thuộc (P) ta luôn có MK $\geq$ MH không? Vì sao?
Thực hiện	- HS so sánh với cách tìm khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong mặt phẳng và trả lời câu hỏi - GV đưa ra gợi ý cách tìm khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong mặt phẳng nếu cần và chuẩn hóa câu trả lời của học sinh.
Báo cáo thảo luận	Học sinh trả lời, thảo luận, hoàn thiện sản phẩm.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	- GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. - Trên cơ sở câu trả lời của học sinh, GV kết luận về khái niệm khoảng cách …

1.2)Hoạt động luyện tập:

a. Mục tiêu: Học sinh vận dụng kiến thức khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng.

b. Nội dung hoạt động:

Ví dụ 1.

Cho hình chóp đều $S.ABC$. Biết độ dài cạnh đáy, cạnh bên tương ứng bằng a,b $\left(a<b\sqrt{3}\right)$.Tính chiều cao của hình chóp .

Luyện tập 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a$, AA′=h (H.7.77).

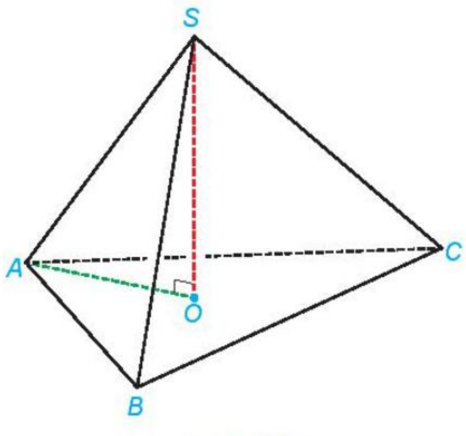
a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

b) Tam giác ABC' là tam giác gì ? Tính khoảng cách từ A đến BC'.

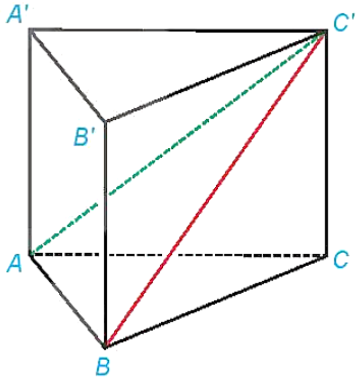
c. Sản phẩm

Lời giải của học sinh

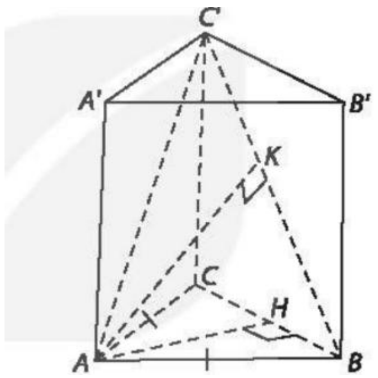
Ví dụ 1.Cho hình chóp đều $S.ABC$. Biết độ dài cạnh đáy, cạnh bên tương ứng bằng a,b $\left(a<b\sqrt{3}\right)$.Tính chiều cao của hình chóp .



Hình 7.76



Hình 7.77



Giải :(H.7.76)

Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là tâm O của tam giác đều ABC, ta có $OA=\frac{a}{\sqrt{3}}$.Trong tam giác suông SOA, ta có $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$. Vậy chiều cao của hình chóp là $SO=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$.

Luyện tập 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a, AA'=h$ (H.7.77).

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

b) Tam giác ABC' là tam giác gì ? Tính khoảng cách từ A đến BC'.

Lời giải:

a) Kẻ AH là đường cao của tam giác ABC

H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(BCC'B')$ nên $d\left(A,(BCC'B')\right)=AH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

b) Tam giác ABC' là tam giác vuông tại A Kẻ AK là đường cao của tam giác vuông ABC' hay K là hình chiếu vuông góc của A trên BC' nên $d(A,BC')=AK$

Xét tam giác vuông ABC': $AK=\frac{AB.AC'}{BC'}=\frac{a.\sqrt{a^2+h^2}}{\sqrt{2a^2+h^2}}=a\sqrt{\frac{a^2+h^2}{2a^2+h^2}}$ Vậy $d(A,BC')=a\sqrt{\frac{a^2+h^2}{2a^2+h^2}}$

d) Tổ chức thực hiện

Chuyển giao	- Với VD1: GV vẽ hình lên bảng gợi ý (nếu cần) cho HS cách chứng minh - HS suy nghĩ và tìm câu trả lời - Với Luyện tập 1: GV cho hs hoạt động theo nhóm
Thực hiện	- HS suy nghĩ và đưa ra câu trả lời, treo bảng làm bài luyện tập 1 - GV gợi ý nếu cần
Báo cáo thảo luận	- HS đọc sgk, thảo luận và đưa ra các ý kiến của mình HS dưới lớp lắng nghe và bổ sung. -Các nhóm treo bảng, các nhóm khác bổ sung và nhận xét
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	- GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất, nhóm có bài làm tốt nhất. - Trên cơ sở câu trả lời của học sinh, GV kết luận

2. KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG, GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

2.1. Hoạt động hình thành kiến thức

a. Mục tiêu: Hình thành khái niệm khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song và khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

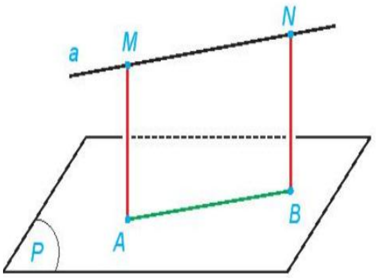
b. Nội dung hoạt động:

Nhiệm vụ 1:

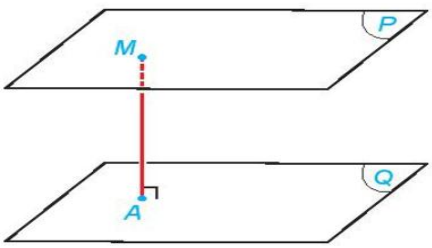
CH1: Khi để một cái thước kẻ song song với mặt bàn, so sánh khoảng cách từ điểm đầu và điểm cuối của thước kẻ xuống mặt bàn? Từ đó đặt vấn đề cách tìm khoảng cách giữa cái thước và mặt bàn?
CH2: so sánh khoảng cách từ các điểm khác nhau trên mặt bàn xuống mặt sàn (giả thiết mặt bàn song song mặt sàn)? So sánh khoảng cách từ các điểm khác nhau trên mặt trần xuống mặt sàn lớp học (giả thiết mặt trần và mặt sàn song song với nhau)? Từ đó đặt vấn đề cách tìm khoảng cách giữa mặt trần và mặt sàn lớp học?
GV liên hệ sang nội dung khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song và khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Nhiệm vụ 2:

HĐ2. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Lấy hai điểm M, N bất kỳ thuộc a và gọi A, B tương ứng là các hình chiếu của chúng trên (P) (H7.78)



Hình 7.78



Hình 7.79

Giải thích vì sao $ABMN$ là một hình chữ nhật và M, N có cùng khoảng cách đến (P).

Nhiệm vụ 3:

HĐ3. a) Cho hai đường thẳng m và n song song với nhau. Khi một điểm M thay đổi trên m thì khoảng cách từ nó đến đường thẳng n có thay đổi hay không ?
b) Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) một điểm M thay đổi trên (P) (H.7.79) . Hỏi khoảng cách từ M đến (Q) thay đổi thế nào khi M thay đổi .

Nhiệm vụ 4:

Nếu đường thẳng a thuôc mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) thì giữa $d(a,(Q))$ và $d((P),(Q))$ có mối quan hệ gì ?

c. Sản phẩm học tập:
Câu trả lời của học sinh
- Phần thuyết trình, báo cáo kết quả của đại diện nhóm

Nhiệm vụ 1: Hs quan sát
Nhiệm vụ 2:
$AB//MN$ và $AB = MN$ nên $ABMN$ là hình bình hành. Lại có $\angle MAB = 90^o$ (do $AM \perp AB$) nên $ABMN$ là hình chữ nhật.
Do $ABMN$ là hình chữ nhật nên $MA = NB$ hay M, N có cùng khoảng cách đến (P).

Nhiệm vụ 3:
a) Khi một điểm M thay đổi trên m thì khoảng cách từ nó đến đường thẳng n không thay đổi
b) khoảng cách từ M đến (Q) thay đổi thế nào khi M thay đổi

Nhiệm vụ 4:
$d(a,(Q)) = d((P),(Q))$

Cách tính khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a, kí hiệu $d(a,(P))$, là Khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên a đến (P).

Cách tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song song (P) và (Q) kí hiệu $d((P),(Q))$, là khoảng cách từ một điểm bất kỳ từ mặt này đến mặt kia .
Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m,n kí hiệu $d(m,n)$, là khoảng cách từ một điểm thuộc đường này đến đường kia .

Nhận xét:

a) Khi đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P): $d(a,(Q))=d((P),(Q))$.

b) Khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ gọi là chiều cao của hình lăng trụ đó .

d. Tổ chức hoạt động:

Chuyển giao	Nhiệm vụ 1: - GV lấy thước kẻ đặt song song với mặt bàn và đưa ra câu hỏi - HS suy nghĩ và tìm câu trả lời - GV chỉ các vật dụng có sẵn trong lớp học như cái mặt bàn và mặt sàn để HS so sánh khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt bàn tới mặt sàn,… Nhiệm vụ 2,3,4: Sử dụng sgk
Thực hiện	- HS suy nghĩ và đưa ra câu trả lời - GV chuẩn hóa câu trả lời của học sinh.
Báo cáo thảo luận	- Học sinh thảo luận theo nhóm và đưa ra kết luận cuối cùng cách tìm khoảng cách giữa dường thẳng và mặt phẳng song song, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	- GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất. - Trên cơ sở câu trả lời của học sinh, GV kết luận về khái niệm khoảng cách …

Tiết 2

2.2. Hoạt động luyện tập

a. Mục tiêu: Học sinh vận dụng kiến thức khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song và khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

b. Nội dung hoạt động:

Ví dụ 2. Cho hình hộp đứng $ABCDA'B'C'D'$, đáy là các hình thoi cạch đáy bằng a, $BAD=120^0$,AA′=h .Tính khoảng cách giữa $A'C',(ABCD)$, $AA',(BDD'B')$.

Luyện tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABC)$, $SA=h$. Gọi M,N tương ứng là trung điểm của SA,SB,SC .

a)Tính $d((MP),(ABC))$ và $d(NP,(ABC))$.

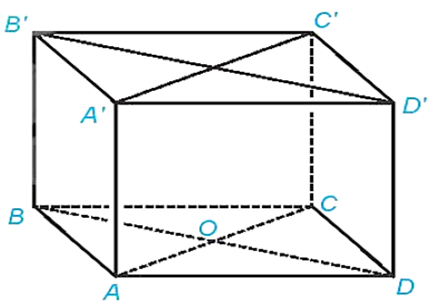
b)Giả sử tam giác ABC vuông tại B, và $AB=a$ .Tính $d(A,(SBC))$.

c. Sản phẩm học tập

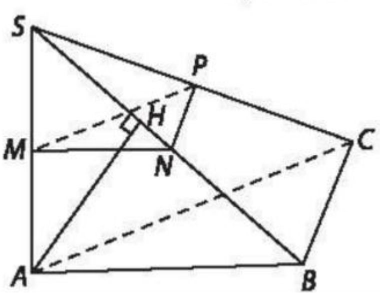
Lời giải ví dụ 2:

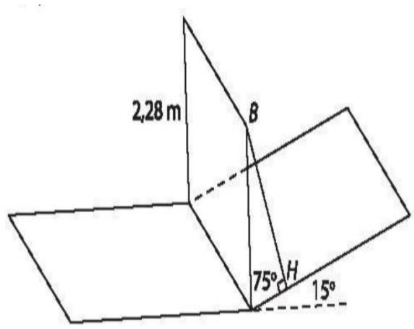
Ví dụ 2. Cho hình hộp đứng $ABCDA'B'C'D'$, đáy là các hình thoi cạch đáy bằng a, $BAD=120^0$,AA′=h .Tính khoảng cách giữa $A'C',(ABCD)$, $AA',(BDD'B')$.

Giải (H.7.80)



Hình 7.80





Đường thẳng $A'C'\in(A'B'C'D')$ nên nó song song với mặt phẳng $(ABCD)$ do $ABCDA'B'C'D'$

là hình hộp đứng nên $A'A \perp (ABCD)$. Vậy $d(A'C',(ABCD)) = d(AA',(BDD'B')) = A'A = h$.

Do $AA'//BB'$ nên $AA'//(BDD'B')$. Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$. Do $AO \perp BD$, $AO \perp BB'$ nên $AO \perp (BDD'B')$. Vậy khoảng cách giữa $AA',(BDD'B')$ bằng độ dài đoạn AO.

Tam giác BAD là tam giác cân tại A và có $BAD = 120^0 \Rightarrow ABO = 30^0$.

Do đó, trong tam giác vuông AOB, Ta có $AO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$.

Vậy khoảng cách giữa $AA',(BDD'B')$ bằng $\frac{a}{2}$.

Lời giải luyện tập 2

a) $d((MNP),(ABC)) = AM = \frac{h}{2}$. $d(NP,(ABC)) = \frac{h}{2}$.

b) $AH \perp SB$ tại H $\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = \frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

Lời giải vận dụng:

Gọi B là một điểm nằm trên thanh ngang và H là hình chiếu vuông góc xuống mặt dốc.
Khoảng cách từ B đến mặt dốc là $BH = 2,28\sin 75^0 \approx 2,2(m)$. Do đó không cho phép xe cao 2,21 m đi qua.

3.KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU .

3.1)Hoạt động hình thành kiến thức:

a. Mục tiêu: Học sinh tiếp cận kiến thức khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

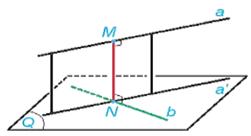
b. Nội dung hoạt động:

HĐ4. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b .Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng b và song song với a. Hình chiếu vuông góc a' của a trên (Q) cắt b tại N trên a (H.7.83)

a).Mặt phẳng chứa a và a' có vuông góc với (Q) hay không?

b).Đường thẳng MN có vuông góc với cả hai đường thẳng a và b hay không ?

c).Nêu mối quan hệ của khoảng cách giữa a , (Q) và độ dài đoạn thẳng MN .



Hình 7.83

c. Sản phẩm học tập:

-Lời giải HĐ 4:

a) Gọi (P) là mặt phẳng chứa a và a'. Khi đó $(P) \perp (Q)$.

b) Đường thẳng $MN \perp (Q)$ và $(P) \perp (Q)$ nên $MN \subset (P)$. Mặt khác $a \parallel (Q)$ nên $a \parallel a'$,vậy $MN \perp a$ và $MN \perp b$.

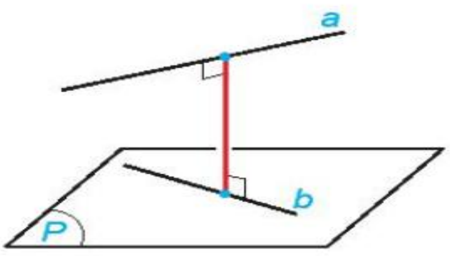
c) $d(a,(Q)) = MN$.

- Khái niệm đường vuông góc chung và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

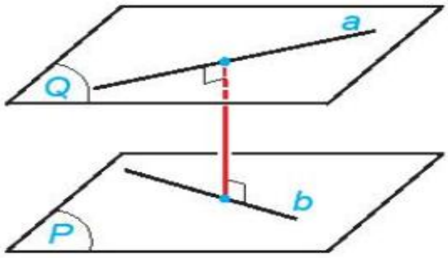
Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a,b và vuông góc với cả hai đường thẳng đó gọi là đường vuông góc chung của a và b.
Nếu đường vuông góc chung Δ cắt a,b tương ứng tại M,N thì độ dài đoạn thẳng MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a,b.

Nhận xét

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại (H.7.85).
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, tương ứng chứa hai đường thẳng đó (H.7.86).



Hình 7.85



Hình 7.86

d. Tổ chức thực hiện:

Chuyển giao	- GV chia lớp thành 4 nhóm và các nhóm cùng nghiên cứu HĐ4
Thực hiện	- HS thảo luận thực hiện nhiệm vụ.
Báo cáo thảo luận	- HS 4 nhóm treo đáp án .
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	- GV sửa lỗi trình bày. - Chuẩn hóa kiến thức, nê các nhận xét

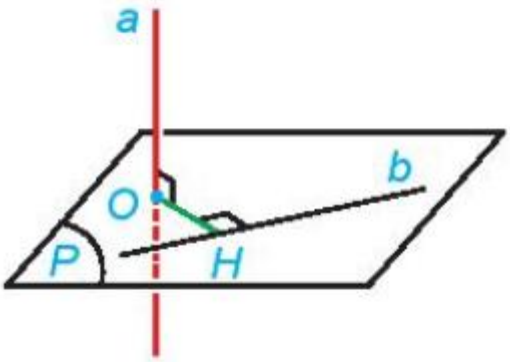
3.2)Hoạt động luyện tập:

a. Mục tiêu: Học sinh vận dụng kiến thức khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

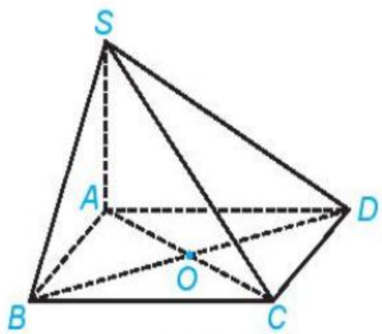
b. Nội dung hoạt động:

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABC), AB=a, ABC=60^\circ$. Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

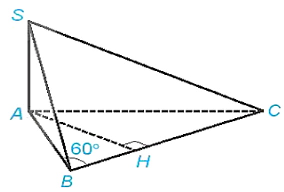
Khám phá. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt (P) tại O. Cho đường thẳng b thuộc mặt phẳng (P). Hãy tìm mối quan hệ giữa khoảng cách giữa a,b và khoảng cách từ O đến b (H.7.88).



Hình 7.88



Hình 7.89



Hình 7.87

Luyện tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SA\perp(ABCD), SA=a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ A đến SC.

b) Chứng minh rằng $BD\perp(SAC)$.

c) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa BD và SC..

Thảo luận. Khoảng cách giữa hai hình được nêu trong bài học (điểm, đường thẳng, mặt phẳng) là khoảng cách nhỏ nhất giữa một điểm thuộc hình này và một điểm thuộc hình kia. Hãy thảo luận để làm rõ nhận xét này.

c) Sản phẩm: Lời giải của học sinh

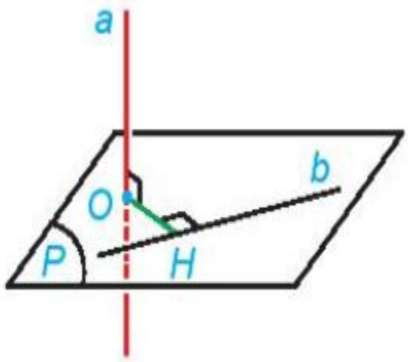
Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABC), AB=a, ABC=60^\circ$. Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Giải. (H.7.87)

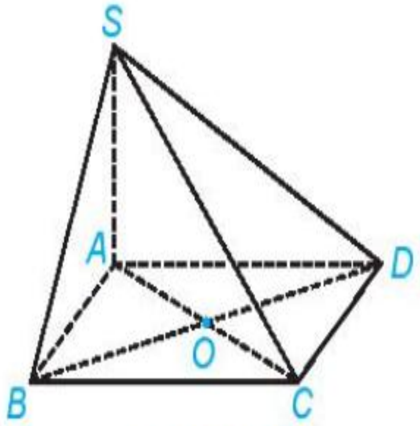
Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Tam giác ABH vuông tại H và có $AB=a, ABH=60^\circ$ nên $BH=\frac{a}{2}$.

Do SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên AH là đường vuông góc chung của SA và BC (H thuộc tia BC và $BH=\frac{a}{2}$). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $d(SA,BC)=AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

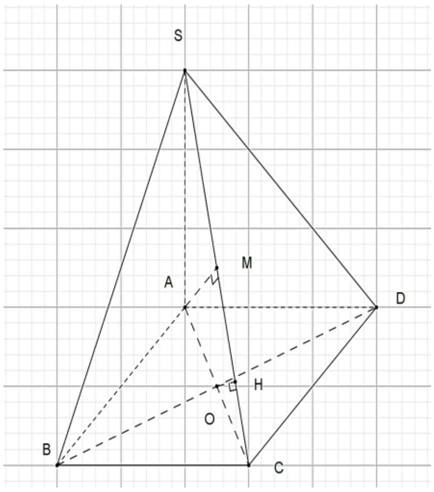
Khám phá. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt (P) tại O. Cho đường thẳng b thuộc mặt phẳng (P). Hãy tìm mối quan hệ giữa khoảng cách giữa a,b và khoảng cách từ O đến b (H.7.88).



Hình 7.88



Hình 7.89



Khoảng cách giữa a,b bằng khoảng cách từ O đến b.

Luyện tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SA\perp(ABCD), SA=a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ A đến SC.

b) Chứng minh rằng $BD\perp(SAC)$.

c) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa BD và SC.

a) Do $SA=AC=a\sqrt{2}\Rightarrow\Delta SAC$ vuông cân tại $A\Rightarrow SC=\sqrt{AC^2+AS^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=2a$. Gọi M là trung điểm của SC. $AM\perp SC\Rightarrow d\left(A,SC\right)=AM=\frac{SC}{2}=2a.$

b) Ta có $ABCD$ là hình vuông nên $AC\perp BD\,(1)$. Theo bài ra $\begin{cases}SA\perp(ABCD)\\BD\subset(ABCD)\end{cases}\Rightarrow BD\perp SA(2)$.

Từ $(1),(2)\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow SC\perp BD\left(Do\ SC\subset SAC\right)$.

c) Gọi O là trung điểm của BD. Trong (SAC) kẻ $OH\perp SC\ (H\in SC)\Rightarrow OH$ là đường vuông góc chung của SC và BD vì $\begin{cases}OH\perp SC\\OH\perp BD\left(Do\begin{cases}BD\perp(SAC)\\OH\subset(SAC)\end{cases}\right)\\O\in BD,\ H\in SC\end{cases}$ Do đó $d\left(SC,BD\right)=OH$.

Ta có $\Delta SAC\sim\Delta OHC\Rightarrow\frac{OH}{SA}=\frac{OC}{SC}\Rightarrow OH=\frac{SA.OC}{SC}=\frac{a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a}=\frac{a}{2}.$

Vậy $d\left(SC,BD\right)=\frac{a}{2}.$

d) Tổ chức thực hiện

Chuyển giao	- Với VD3: GV vẽ hình lên bảng gợi ý (nếu cần) cho HS cách chứng minh - HS suy nghĩ và tìm câu trả lời - Với mục khám phá: GV yêu cầu HS đọc lại định nghĩa đường vuông góc chung và trả lời câu hỏi - Với Luyện tập 3: GV cho hs hoạt động theo nhóm
Thực hiện	- HS suy nghĩ và đưa ra câu trả lời, treo bảng làm bài luyện tập 3 - GV gợi ý nếu cần
Báo cáo thảo luận	- HS đọc sgk, thảo luận và đưa ra các ý kiến của mình HS dưới lớp lắng nghe và bổ sung. -Các nhóm treo bảng, các nhóm khác bổ sung và nhận xét
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	- GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất, nhóm có bài làm tốt nhất.

	- Trên cơ sở câu trả lời của học sinh, GV kết luận

Tiết 3:

***) Hoạt động luyện tập và vận dụng**

a. Mục tiêu: Rèn luyện các kỹ năng từ đó củng cố lại các kiến thức đã được học trong bài học. Vận dụng các kiến thức đã học giải quyết bài toán trong thực tế.

b. Nội dung:

*** Nhiệm vụ 1: Luyện tập để củng cố các kiến thức** (bài 7.22; 7.23;7.24; 7.25, 7.26 ,7.27 SGK)

*** Nhiệm vụ 2: Bài tập trắc nghiệm phiếu học tập số 2** (xem phiếu bài tập tại phần phụ lục)

c. Sản phẩm:

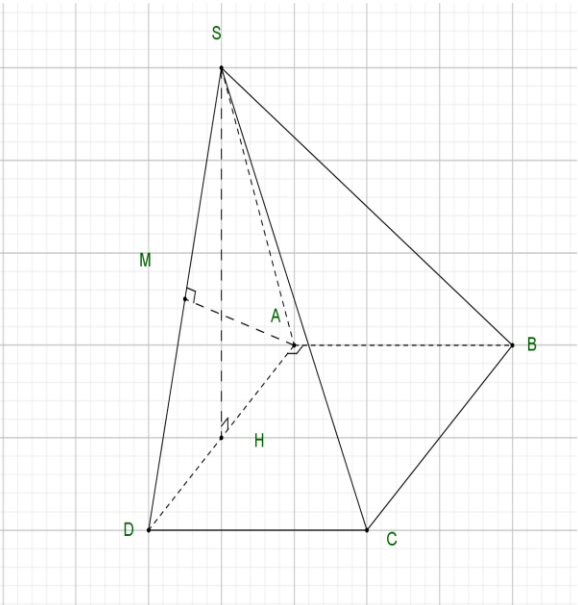
7.22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là một tam giác đều và $(SAD)\perp(ABCD)$.

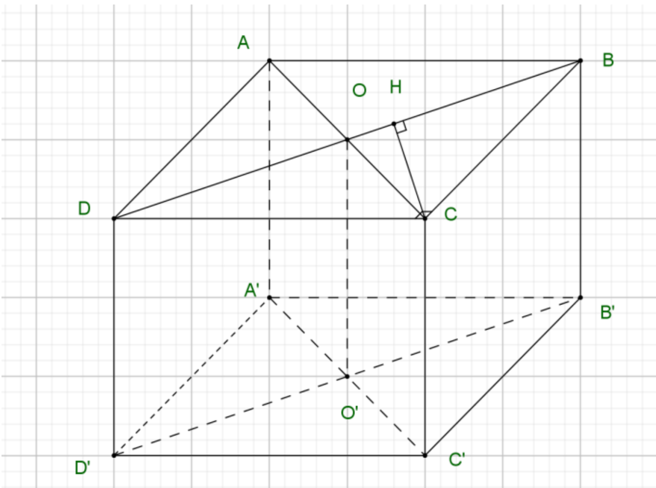
a) Tính chiều cao của hình chóp.

b) Tính khoảng cách giữa BC và (SAD).

c) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa AB và SD.

Giải





a) Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH\perp AD.$

Theo bài ra ta có $\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\(SAD)\cap(ABCD)=AD\\SH\perp AD\\AD\subset(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)\Rightarrow d\left(S,(ABCD)\right)=SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

b) Ta có $\begin{cases}BC//AD\\AD\subset(SAD)\end{cases}\Rightarrow d\left(BC,(SAD)\right)=d\left(B,(SAD)\right)$

$$\begin{cases}AB\perp AD\\AB\perp SH\ \left(do\ SH\perp(ABCD),AB\subset(ABCD)\right)\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAD)\Rightarrow d\left(B,(SAD)\right)=AB=a.$$

c) Gọi M là trung điểm của $SD\Rightarrow AM\perp SD\,(1)$. Mà $\begin{cases}AB\perp(SAD)\\AM\subset(SAD)\end{cases}\Rightarrow AM\perp AB\,(2).$

Từ $(1),(2)\Rightarrow AM$ là đoạn vuông góc chung của $SD, AB\Rightarrow d(SD,AB)=AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

7.23. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có $AA'=a, AB=b, BC=c$.

a) Tính khoảng cách giữa CC' và $(BB'D'D)$.

b) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa AC và $B'D'$.

a) Ta có $\begin{cases} CC'//BB' \\ BB' \subset (BDD'B') \end{cases} \Rightarrow d\left(CC',(BDD'B')\right) = d\left(C,(BDD'B')\right)$

Trong $(ABCD)$ kẻ $CM \perp BD\ (M \in BD)\ (1)$.

Ta có $\begin{cases} BB' \perp (ABCD) \\ AM \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow AM \perp BB'\ (2)$.

Từ $(1),(2) \Rightarrow CM \perp (BDD'B') \Rightarrow d\left(CC',(BDD'B')\right) = d\left(C,(BDD'B')\right) = CM$.

Tam giác BCD vuông tại $C \Rightarrow \dfrac{1}{CM^2} = \dfrac{1}{CD^2} + \dfrac{1}{CB^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow CM = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$\Rightarrow d\left(CC',(BDD'B')\right) = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

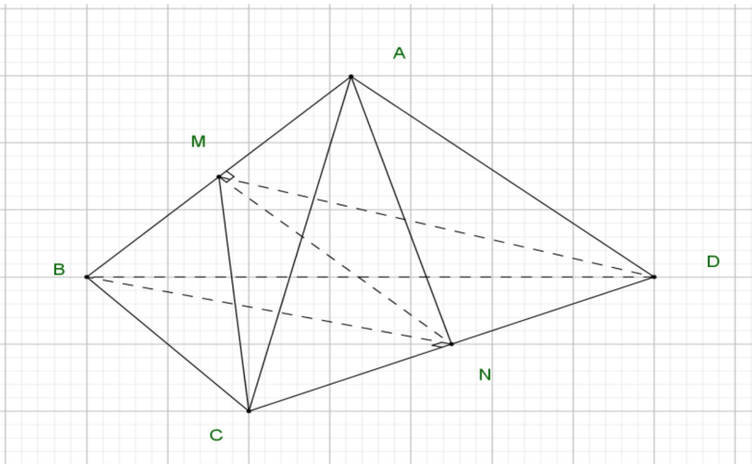
b) AC và $B'D'$ chéo nhau.
Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của $AC, B'D'$.

Ta có $\begin{cases} OO' \perp (ABCD), AC \subset (ABCD) \\ OO' \perp (A'B'C'D'), B'D' \subset (A'B'C'D') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OO' \perp AC \\ OO' \perp B'D' \end{cases} \Rightarrow OO'$ là đoạn vuông góc chung của

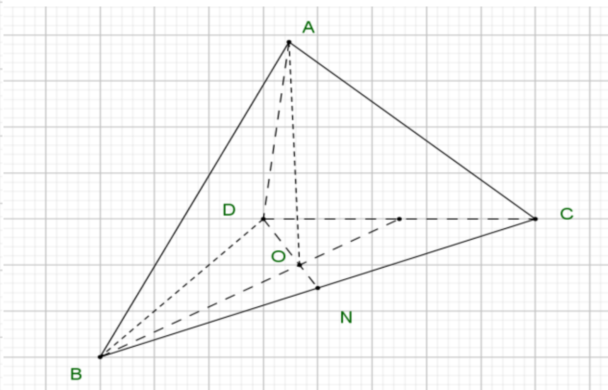
$AC, B'D' \Rightarrow d\left(AC, B'D'\right) = OO' = AA' = c.$

7.24. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD . Chứng minh rằng:
a) MN là đường vuông góc chung của AB và CD.
b) Các cặp cạnh đối diện trong tứ diện $ABCD$ đều vuông góc với nhau.

Giải



24



c26

a) Ta có $MC = MD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta MCD$ cân tại $M \Rightarrow MN \perp CD\ (1)$. (Do N là trung điểm của CD).

Ta có $BN = NA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta NAB$ cân tại $N \Rightarrow MN \perp AB\ (2)$. (Do M là trung điểm của AB).

Từ Ta có $(1),(2) \Rightarrow MN$ là đường vuông góc chung của AB, CD .

b) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AD.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) - AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

$= a.a.\cos BAD - a.a.\cos BAC = a^2\cos 60^0 - a^2\cos 60^0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow AB \perp CD.$

Tương tự :

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AD.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) - AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

$= a.a.\cos DAC - a.a.\cos BAC = a^2\cos 60^0 - a^2\cos 60^0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow BD \perp AC.$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = AC.AD.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) - AB.AD.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$

$= a.a.\cos CAD - a.a.\cos BAD = a^2\cos 60^0 - a^2\cos 60^0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow AD \perp BC.$

7.25. Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có cạnh a.
a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(D'AC)$ và $(BC'A')$ song song với nhau và DB' vuông góc với hai mặt phẳng đó.
b) Xác định các giao điểm E,F của DB' với $(D'AC),(BC'A')$. Tính $\mathrm{d}((D'AC),(BC'A'))$.

Giải

a) Ta có $\begin{cases} AA'//CC' \\ AA'=CC' \end{cases} \Rightarrow ACC'A'$ là hình bình hành $AC//A'C'$ $\begin{cases} AC//A'C' \\ A'C'\subset(BA'C')\Rightarrow AC//(BA'C')(1). \\ AC\not\subset(BA'C') \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} A'D'//BC \\ A'D'=BC \end{cases} \Rightarrow BCD'A'$ là hình bình hành $CD'//A'B$ $\begin{cases} D'C//A'B \\ A'B\subset(BA'C')\Rightarrow D'C//(BA'C')(2). \\ D'C\not\subset(BA'C') \end{cases}$

Từ $(1),(2)\Rightarrow(D'AC)//(BA'C')$.

Gọi O,O' lần lượt là trung điểm của $AC,B'D'$. Trong $(BDD'B')\Rightarrow DB'\cap D'O=E, DB'\cap BO'=F$.

$\Delta EOD \sim \Delta ED'B'$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EO}{ED'}=\dfrac{OD}{B'D'}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{D'E}{D'O}=\dfrac{2}{3}$.

Lại có $E\in D'O$ là đường trung tuyến của $\Delta ACD' \Rightarrow E$ là trọng tâm $\Delta D'AC$.
Tương tự: F là trọng tâm $\Delta BA'C'$.

Ta có $\Delta D'AC$ đều nên ta có $\begin{cases} ED'=EA=EC=\dfrac{1}{3}\left(a\sqrt{2}\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ DA=DC=DD'=a \end{cases} \Rightarrow ED$ là trục đường tròn của tam giác $D'AC\Rightarrow DB'\perp(D'AC)\Rightarrow DB'\perp(BA'C')\left(Do\,(D'AC)//(BA'C')\right)$.

b) Ta có:
$\dfrac{DE}{EB'}=\dfrac{DO}{D'B'}=\dfrac{1}{2}$ (vì $\Delta EOD\sim \Delta ED'B'$) $\Rightarrow DE=\dfrac{1}{3}DB'$.

Tương tự $\Rightarrow B'F=\dfrac{1}{3}DB' \Rightarrow EF=\dfrac{1}{3}DB'=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. $\mathrm{d}((D'AC),(BC'A'))=EF=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

7.26. Giá đỡ ba chân ở Hình 7.90 đang được mở sao cho ba góc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng $110\,\mathrm{cm}$. Tính chiều cao của giá đỡ, biết các chân của giá đỡ dài $129\,\mathrm{cm}$.

Giá đỡ có dạng hình chóp $A.BCD$ .gọi N là trung điểm của BC.
Theo bài ra ta có $BC=BD=CD=110cm,\ AB=AC=AD=129cm.$
Gọi O là trọng tâm của tam giác BCD. Do tam giác BCD đều nên ta có

$OB=OC=OD=\dfrac{2}{3}DN=\dfrac{2}{3}.\dfrac{110\sqrt{3}}{2}=\dfrac{110\sqrt{3}}{3}cm.$

Ta có $\begin{cases} AB=AC=AD \\ OC=OD=OB \end{cases} \Rightarrow AO\perp(BCD)\Rightarrow d(A,(BCD))=AO.$

Tam giác AOD vuông tại $O\Rightarrow AO^2=AD^2-OD^2=129^2-\left(\dfrac{110\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{37823}{3}\Rightarrow AO=\dfrac{\sqrt{113469}}{3}cm.$

Vậy chiều cao của giá đỡ là $\dfrac{\sqrt{113469}}{3}cm.$

7.27. Một bể nước có đáy thuộc mặt phẳng nằm ngang. Trong trường hợp này, độ sâu của bể là khoảng cách giữa mặt nước và đáy bể. Giải thích vì sao để đo độ sâu của bể, ta có thể thả quả dọi chạm đáy bể và đo chiều dài của đoạn dây dọi nằm trong bể nước.
Giải

Do mặt đáy bể và mặt nước là 2 mặt phẳng song song nên độ sâu của bể là khoảng cách từ 1 điểm trên mặt nước đến mặt phẳng chứa đáy bể.

Tìm tòi và mở rộng

Vì sao vùng phía bắc chí tuyến Bắc và vùng phía nam chí tuyến Nam tia sáng mặt trời không bao giờ vuông góc với mặt đất (tức là, không xảy ra hiện tượng đứng bóng thực sự tại đó)? (Theo nationalgeographic.com)

Tia sáng mặt trời chỉ vuông góc với mặt đất (tức là có hướng đi qua tâm Trái Đất) tại vị trí P_0 trên mặt đất thuộc đoạn thẳng nối tâm O của Trái Đất và tâm I của Mặt Trời (H.7.91b).

Đường thẳng OI thuộc mặt phẳng chứa quỹ đạo của Trái Đất và trục quay SN (Bắc - Nam) của Trái Đất luôn tạo với mặt phẳng đó một góc khoảng $66,5^0$. Từ đó ta có thể rút ra $\overline{NOI} \geq 66,5^\circ$.

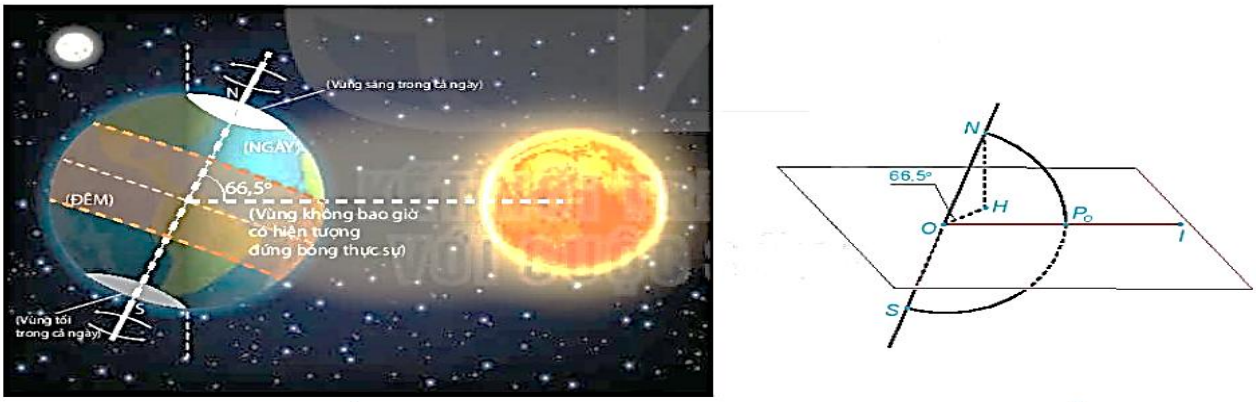
Mỗi vị trí P thuộc vùng phía bắc chí tuyến Bắc đều có vĩ độ bắc $\varphi > 23,5^\circ$, tức là $NOP = 90^\circ - \varphi < 66,5^\circ$. Để ý rằng ON vuông góc với mặt phẳng xích đạo, nên OP tạo với mặt phẳng xích đạo và đường thẳng ON hai góc phụ nhau.

Mặt khác, nếu xảy ra hiện tượng đứng bóng thực sự ở vị trí P thì điểm P thuộc đoạn thẳng OI và do đó $NOP = NOI \geq 66,5^\circ$. Điều này dẫn tới mâu thuẫn. Do đó, không thể xảy ra hiện tượng đứng bóng thực sự tại P.

Trong mô hình toán học được đề cập ở trên, chúng ta thấy, tại mỗi thời điểm, chỉ có thể xảy ra hiện tượng đứng bóng thực sự tại một vị trí (đó là tại vị trí P_0 trên mặt đất và thuộc đoạn thẳng OI), do đó, nhìn chung ngay cả ở các vị trí thuộc vùng giữa hai đường chí tuyến Bắc, Nam (có vĩ độ nhỏ hơn $66,5^0$), trong một năm cũng rất hiếm khi xảy ra hiện tượng đứng bóng thực sự.

Tuy vậy, hiện tượng đứng bóng tại một vị trí trên mặt đất được hiểu theo nghĩ rộng hơn; đó là hiện tượng tia sáng mặt trời chiếu trực diện tới Trái Đất tại vị trí đó. Nó xảy ra khi đường kinh tuyến đi qua vị tri đó và tâm I của Mặt Trời cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ NS. Như vậy, tại mỗi vị trí trên mặt đất, mỗi ngày đều xảy ra hiện tượng đứng bóng. Các vị trí thuộc củng một kinh tuyến thì xảy ra hiện tượng đứng bóng tại cùng một thời điểm, gọi là giữa trưa (trong khoảng 12 giờ trưa cộng, trừ 16 phút).

Góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời và mặt phẳng nằm ngang tại một vị trí lúc giữa trưa được gọi là góc Mặt Trời (như đã phân tích ở trên, nhìn chung, góc này nhọn). Góc Mặt Trời có ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất, chẳng hạn vào mùa hè, góc Mặt Trời lớn nên nhiệt độ cao.



a) b)

Hình 7.91

PHỤ LỤC HỒ SƠ DẠY HỌC

Bài tập bổ sung: ***(Dùng cho học sinh tự luyện, dạy phụ đạo- số lượng 10 câu TN, 10 câu tự luận)***

A. Phần trắc nghiệm (5 câu mức nhận biết, 5 câu thông hiểu):

*** Nhận biết**

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa BB' và AC bằng

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1 (đvd). Khoảng cách giữa AA' và BD' bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

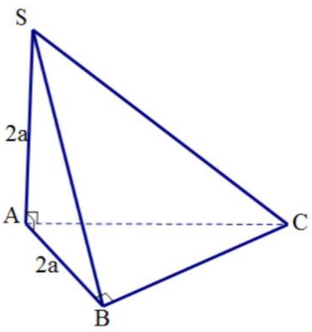
Lời giải

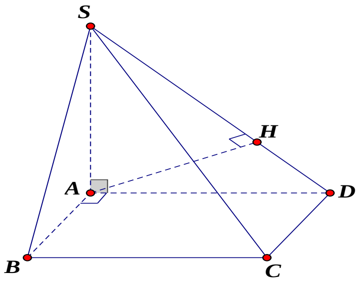
3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và CD'.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** a. C. $a\sqrt{2}$. D. $2a$.

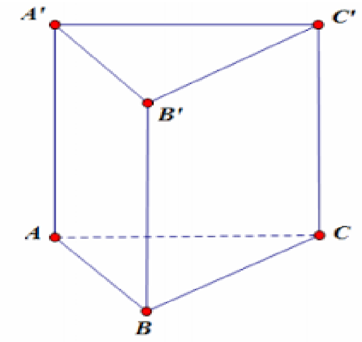
Lời giải

4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp (ABC)$, $SA = AB = 2a$, tam giác ABC vuông tại B (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng





4



5

6

A. $a\sqrt{3}$. B. a. C. $2a$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

5. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AD = 2a$, $SA\perp (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. D. $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Trong tam giác SAD kẻ đường cao AH ta có $AD.AS = AH.SD \Rightarrow AH = \frac{AD.AS}{SD} = \frac{2a.a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Dễ thấy AH chính là đường vuông góc chung của AB và SD

Vậy $d(AB, SD) = AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

*** Thông hiểu**

6: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Khoảng cách giữa AB' và CC' bằng

A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. B. a. C. $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của AB.

Ta có: $CC'//BB'$ nên $CC'//(ABB'A')$.

Vì $AB'\subset(ABB'A')$ nên $d(CC', AB') = d(CC', (ABB'A')) = CI$.

Do lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ nên tam giác ABC đều cạnh a nên $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

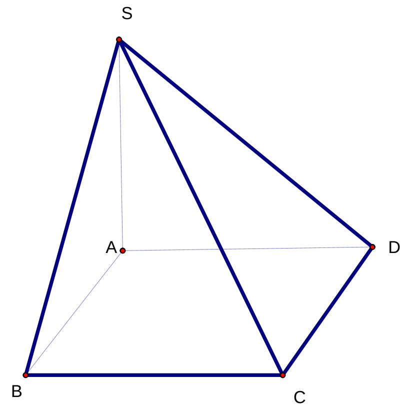
Nên $d\left(CC', AB'\right) = CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với đường chéo $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} DA \perp SA \\ DA \perp AB \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB)$.

Mặt khác $\begin{cases} CD \not\subset (SAB) \\ CD \,//\, AB \end{cases} \Rightarrow CD \,//\, (SAB)$.

Từ đó suy ra khoảng cách giữa SB và CD bằng khoảng cách giữa (SAB) và CD và bằng DA.

Từ giác $ABCD$ là hình vuông với đường chéo $AC = 2a$ suy ra $DA = \sqrt{2}a$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là $a\sqrt{2}$.

8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa đường thẳng SE và đường thẳng BC bằng bao nhiêu?**A.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là 60°. Độ dài cạnh SA bằng**A.** $\frac{3a}{2}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$..

10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30°. Hình chiếu H của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm của $B'C'$. Tính theo a khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. Phần tự luận (mức vận dụng):

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = 2a$; $BC = \frac{3a}{2}$; $AD = 3a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của BD. Biết góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính khoảng cách

a) từ C đến mặt phẳng (SBD).

b) từ B đến mặt phẳng (SAH).

a) Dựng $CK \perp BD \Rightarrow d(C,(SBD)) = CK$

Ta có $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = a\sqrt{13}$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}BC.d(D,BC) = \frac{1}{2}.\frac{3a}{2}.2a = \frac{3a^2}{2}$$

Do đó $d = CK = \dfrac{2S_{BCD}}{BD} = \dfrac{3a^2}{a\sqrt{13}} = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$

b) Dựng $BM \perp AH \Rightarrow d(B,(SAH)) = BM$

Lại có $AH = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền).

$$S_{ABH} = \frac{1}{2}AB.d(H,AB) = \frac{1}{2}2a.\frac{AD}{2} = \frac{1}{2}2a.\frac{3a}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

$$\Rightarrow BM = \frac{2S_{ABH}}{AH} = \frac{3a^2}{\frac{a\sqrt{13}}{2}} = \frac{6a}{\sqrt{13}}$$

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi với $AC = 2a$; $BD = 2a\sqrt{2}$. Gọi H là trọng tâm tam giác ABD, biết rằng các mặt phẳng (SHC) và (SHD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính khoảng cách

a) từ C đến mặt phẳng (SHD)

b) từ G đến mặt phẳng (SHC), với G là trọng tâm tam giác SCD.

Lời giải

a) Do các mặt phẳng (SHC) và (SHD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$

Nên $SH \perp (ABCD)$

Dựng $HI \perp CD \Rightarrow CD \perp (SIH)$

Do $SIH = 60^0; \sin ACD = \dfrac{OD}{CD} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$$\Rightarrow HI = HC\sin ACD = \frac{2}{3}AC\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{4a\sqrt{6}}{9}$$

$$\Rightarrow SH = HI\tan 60^0 == \frac{4a\sqrt{2}}{3}$$

Dựng $CE \perp HD \Rightarrow d(C;(SHD)) = CE$

Lại có: $CE.HD = HI.CD = 2S_{HCD}$,

Trong đó $HI = \dfrac{4a\sqrt{6}}{9}$; $CD = a\sqrt{3}; DH = \sqrt{OD^2 + (\dfrac{1}{3}OA)^2} = a\dfrac{\sqrt{19}}{3}$ $\Rightarrow d = CE = \dfrac{4a\sqrt{38}}{19}$

b) Gọi K là trung điểm CD, do $GS = \dfrac{2}{3}GK \Rightarrow d_G = \dfrac{2}{3}d_k = \dfrac{2}{3}KM$ (Với M là hình chiếu vuông góc của K lên AC). Khi đó $KM = \dfrac{OD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d_G = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. M là trung điểm của cạnh CD, hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ là trung điểm H của AM. Biết góc giữa SD và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính khoảng cách

a) Từ B đến (SAM).

b) Từ C đến (SAH)

Lời giải

a) Kẻ $BN \perp AM$ lại có: $BN \perp SH \Rightarrow BN \perp (SAM) \Rightarrow d(B;(SAM)) = BN$

Ta có: $ABN = DAM; \cos DAM = \dfrac{AD}{AM} = \dfrac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Vậy: $BN = AB.\cos ABN = 2a.\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$

b) Kẻ: $CO \perp AM$

Ta có:

$$CO \perp AH \Rightarrow CO \perp (SAH)$$

$$\Rightarrow d(C;(SAH)) = CO = CM.\cos MCO = CM.\cos ABN = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tâm O, cạnh $a\sqrt{2}$. Biết $SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách:

a) Từ A đến (SBC).

b) Từ A đến (SCD).

c) Từ A đến (SBD).

d) Gọi M là trung điểm BC, tính khoảng cách từ A đến (SCM); Từ A đến (SDM).

e) Gọi I là trung điểm SB, tính khoảng cách từ A đến (DIM).

a) Từ A đến (SBC).

Dựng $AK \perp SB$, $(K \in SB)$ (1).

Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \supset AK \Rightarrow BC \perp AK \quad (2)$.

Từ $(1), (2)$ suy ra $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK = d(A,(SBC))$.

Xét ΔSAB vuông tại A, có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{3}{4a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

b) Từ A đến (SCD).

Dựng $AK \perp SD$, $(H \in SD)$ (1).

Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \supset AH \Rightarrow CD \perp AH \quad (2)$.

Từ $(1), (2)$ suy ra $AH \perp (SCD) \Rightarrow AH = d(A,(SCD))$.

Mặt khác, ta có $AH = AK \Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

c) Từ A đến (SBD).

Dựng $AL \perp SO$, $(H \in SD) \Rightarrow d(A,(SBD)) = AL$.

Xét ΔSAO vuông tại A, có $\dfrac{1}{AL^2} = \dfrac{1}{AO^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

d) Gọi M là trung điểm BC, tính khoảng cách từ A đến (SCM); Từ A đến (SDM).

Ta có $(SCM) \equiv (SDM) \equiv (SCD)$.

Suy ra $d(A,(SCM)) = d(A,(SDM)) = d(A,(SCD)) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

e) Gọi I là trung điểm SB, tính khoảng cách từ A đến (DIM).

Gọi K là trung điểm SA.

Dựng $AJ \perp KD$, $(J \in KD) \Rightarrow d(A,(DMI)) = d(A,(CDKI)) = AJ$.

Xét ΔSAO vuông tại A, có $\frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AJ = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 5. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC với $AB = a$; $AC = 2a$; $BAC = 60^\circ$. Gọi I là trung điểm BC, H là trung điểm AI, tam giác SAI cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Biết góc giữa (SAB) và (ABC) bằng α với $\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{19}}$. Tính khoảng cách:

a) Từ H đến (SBC).

b) Từ H đến (SAJ), với J là trung điểm SC.

a) Từ H đến (SBC).

Gọi Q là trung điểm AB.

Xét ΔABC, có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos 60^\circ = 3a^3 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B.

Do đó góc giữa (SAB) và (ABC) là góc SQH.

Xét ΔSHQ vuông tại H, có $\cos SQH = \frac{QH}{SQ} \Rightarrow SQ = \frac{a\sqrt{3}}{4}.\sqrt{\frac{19}{3}} = \frac{a\sqrt{19}}{4} \Rightarrow SH = a$.

Gọi L là trung điểm BI, M là hình chiếu của H lên $SQ \Rightarrow d(H,(SBC)) = HM$.

Xét ΔSHL vuông tại H, có $\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HL^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

b) Từ H đến (SAJ), với J là trung điểm SC.

Gọi P là hình chiếu của I lên AC, suy ra $IP = IC.\sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi K là trung điểm của AP, N là hình chiếu của H lên SK, suy ra $d(H,(SAJ)) = HN$.

Xét ΔSHK vuông tại H, có $\frac{1}{HN^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{64}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{67}{3a^2} \Rightarrow HN = a\sqrt{\frac{67}{3}}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = 2a$; $AD = 3a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AC. Biết góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính khoảng cách:

a) Từ H đến (SAB).

b) Từ H đến (SCD).

c) Từ H đến (SBD).

a) Từ H đến (SAB).

Gọi M là trung điểm BC, suy ra góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là góc $SMH = 60^\circ$ và $SH = HM.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Gọi N là trung điểm của AB, I là hình chiếu của H lên SN, suy ra $d(H,(SAB)) = HI$.

Xét ΔSHN vuông tại H, có $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow HN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Từ H đến (SCD).

Kẻ $HJ \perp CD, (J \in CD)$, lấy $E \in AD$ sao cho $ED = a$, gọi $F = BE \cap CD$.

Xét ΔCHF vuông tại H, có $\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{18a^2} = \frac{5}{9a^2}$.

Gọi P là hình chiếu của H lên SJ, suy ra $d\left(H,(SCD)\right) = HP$.

Xét ΔSHJ vuông tại H, có $\frac{1}{HP^2} = \frac{1}{HJ^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{5}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{8}{9a^2} \Rightarrow HP = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

c) Từ H đến (SBD).

Gọi $G = EC \cap BD \Rightarrow G$ là trọng tâm ΔBCF $\Rightarrow GE = \frac{1}{3}CE = \frac{2a}{3}$.

Gọi E_1 là hình chiếu của E lên BD, ta có $\frac{1}{EE_1^2} = \frac{1}{EG^2} + \frac{1}{ED^2} = \frac{9}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{13}{4a^2} \Rightarrow EE_1 = \frac{2a\sqrt{13}}{13}$.

Gọi H_1 là hình chiếu của H lên $BD \Rightarrow HH_1 = \frac{1}{2}EE_1 = \frac{a\sqrt{13}}{13}$.

Gọi H_2 là hình chiếu của H lên SH_1, suy ra $d\left(H,(SBD)\right) = HH_2$.

Xét ΔSHH_1 vuông tại H, có $\frac{1}{HH_2^2} = \frac{1}{HH_1^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{13}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{40}{3a^2} \Rightarrow HH_2 = \frac{a\sqrt{30}}{20}$.

Câu 7. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$, và SA vuông góc với $(ABCD)$. Biết góc giữa (SCD) và đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách:

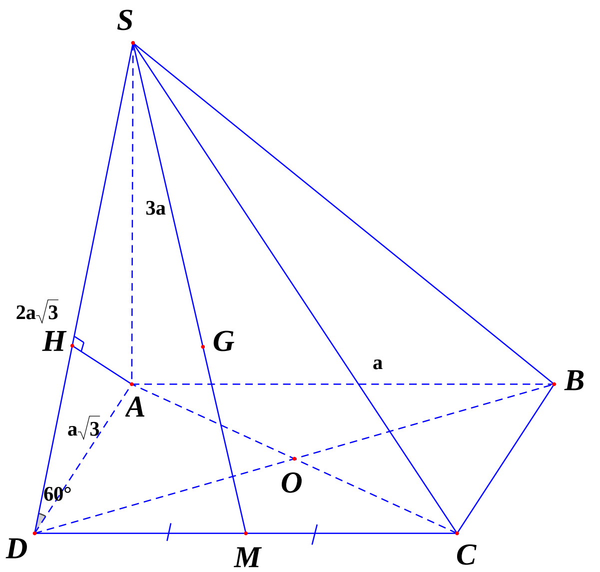
a) Từ O đến (SCD) với O là tâm đáy

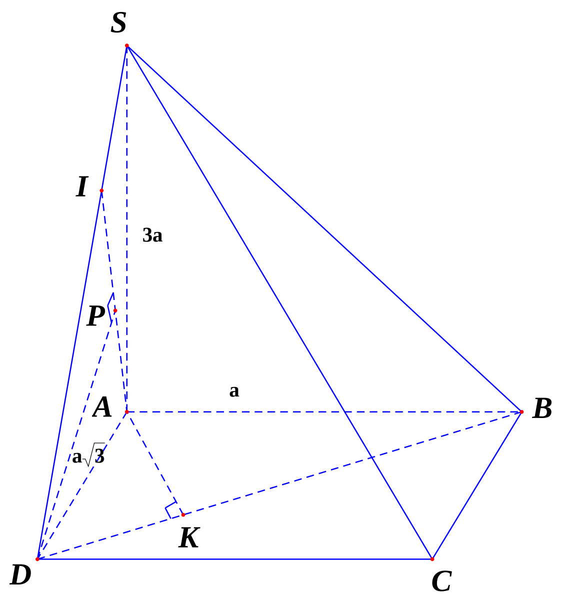
b) Từ G đến (SAB) với G là trọng tâm tam giác SCD

c) SA và BD

d) CD và AI với I là điểm thuộc SD sao cho $SI = \frac{1}{2}ID$

Giải





a) Góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là $SDA = 60^0$

Ta có: $SA = AD.\tan 60^0 = 3a$ và $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 2\sqrt{3}a$

Trong (SAD) kẻ $AH \perp SD$ tại H. Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

$\Rightarrow CD \perp AH$ mà $AH \perp SD$ nên $AH \perp (SCD) \Rightarrow d\left(A;(SCD)\right) = AH = \frac{AS.AD}{SD} = \frac{3a.a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}a} = \frac{3a}{2}$

Ta có: $AO \cap (SCD) = C \Rightarrow \frac{d\left(O;(SCD)\right)}{d\left(A;(SCD)\right)} = \frac{OA}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d\left(O;(SCD)\right) = \frac{3a}{4}$.

b)Gọi M là trung điểm của CD. Ta có S,G,M thẳng hàng và $\frac{GS}{MS}=\frac{2}{3}$

Ta có:

$CD//(SAB)\Rightarrow d(M;(SAB))=d(O;(SAB))=DA=\sqrt{3}a$ (vì $M\in CD$ và $DA\perp(SAB)$)

$MG\cap(SAB)=S\Rightarrow \frac{d(G;(SAB))}{d(M;(SAB))}=\frac{GS}{MS}=\frac{2}{3}\Rightarrow d(G;(SAB))=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

c)Trong $(ABCD)$, kẻ $AK\perp BD$ tại K. Ta có $\begin{cases}AK\perp SA\\AK\perp BD\end{cases}\Rightarrow d(SA;BD)=AK$

Ta có: $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow AK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $d(SA;BD)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

d)Theo giả thiết $SI=\frac{1}{2}ID\Rightarrow SI=\frac{1}{3}SD=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ và $ID=\frac{4\sqrt{3}}{3}a$

Ta có: $CD//(ABI)\Rightarrow d(CD;AI)=d(CD;(ABI))=d(D;(ABI))$

Trong (SAD). Kẻ $DP\perp AI$ tại P. Ta có $AB\perp(SAD)\Rightarrow AB\perp DP$

Do đó $DP\perp(ABI)\Rightarrow d(D;(ABI))=DP$

Ta có: $IA^2=SI^2+SA^2-2SI.SA.\cos ISA=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2+9a^2-2.\frac{2\sqrt{3}}{3}a.3a.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{13}{3}a^2\quad\Rightarrow IA=\frac{\sqrt{39}}{3}a$

$S_{\Delta ADI}=\frac{1}{2}DI.DA.\sin ADI=\frac{1}{2}.\frac{4\sqrt{3}}{3}a.a\sqrt{3}.\sin 60^0=\sqrt{3}a^2$

Và $S_{\Delta ADI}=\frac{1}{2}DP.AI=\sqrt{3}a^2=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{39}}{3}a.DP\Rightarrow DP=\frac{6\sqrt{13}}{13}a$ Vậy $d(CD;AI)=\frac{6\sqrt{13}}{13}a$

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=2a,\ AD=3a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc AB với $AH=HB$. Biết góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0.

a)Tính góc giữa CD và SB b)Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)

c)Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) d)Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB

e)Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SE với E là điểm thuộc AD sao cho $AE=a$

Giải

a)Trong $(ABCD)$, kẻ $CK\perp AD$ tại K. Ta có tứ giác $AKCB$ là hình vuông.

Khi ấy $HC=a\sqrt{5};CD=a\sqrt{5}$ và $HD=a\sqrt{10}$

Suy ra $HD^2=CH^2+CD^2$ nên ΔHCD vuông tại C và do $CH=CD$ nên ΔHCD vuông cân tại C

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(SCD)\cap(ABCD)=CD\\ CD\perp CH\subset(ABCD)\\ CD\perp SC\subset(SCD)(do\ \mathrm{CD}\perp\mathrm{CH};\mathrm{CD}\perp\mathrm{SH}\Rightarrow\mathrm{CD}\perp(SCH))\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ Góc giữa (SCD) với $(ABCD)$ là $SCH=60^0$

ΔSCH vuông tại H có $SH=CH.\tan 60^0=a\sqrt{15}\Rightarrow SA=SB=\sqrt{SH^2+BH^2}=4a$

Xét $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{SB}(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KD})=\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{BA}$ ($\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{KD}=0$ vì $AD\perp(SAB)$

Nên $AD\perp SB\Rightarrow KD\perp SB$)

$= SB.BA.\cos\left(\overrightarrow{SB};\overrightarrow{BA}\right)$

$= -SB.BA.\cos\left(\overrightarrow{BS};\overrightarrow{BA}\right) = -SB.BA.\cos SBA = -BH.BA = -a.2a = -2a^2$

Mà

$\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{CD} = SB.CD.\cos\left(\overrightarrow{SB};\overrightarrow{CD}\right) \Rightarrow -2a^2 = 4a.a\sqrt{5}.\cos\left(\overrightarrow{SB};\overrightarrow{CD}\right)$

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{SB};\overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{-1}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \left(\overrightarrow{SB};\overrightarrow{CD}\right) = 102,92^0 \approx 103^0 \Rightarrow (SB;CD) \approx 77^0$

b)Trong $(ABCD)$; $AB \cap CD = M$

Vì $KC//AM$ nên theo Talet ta có: $\dfrac{KC}{AM} = \dfrac{KD}{AD} \Rightarrow \dfrac{2a}{AM} = \dfrac{a}{3a} \Rightarrow AM = 6a$

Trong (SHC), kẻ $HP \perp SC$ .Ta có $HP \perp (SCD) \Rightarrow d\left(H;(SCD)\right) = HP$

Ta có: $\dfrac{1}{HP^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HC^2} = \dfrac{1}{15a^2} + \dfrac{1}{5a^2} = \dfrac{4}{15a^2} \Rightarrow HP = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$ Vậy $d\left(H;(SCD)\right) = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

$AH \cap (SCD) = M \Rightarrow \dfrac{d\left(A;(SCD)\right)}{d\left(H;(SCD)\right)} = \dfrac{AM}{HM} = \dfrac{6a}{5a} = \dfrac{6}{5} \Rightarrow d\left(A;(SCD)\right) = \dfrac{3a\sqrt{15}}{5}$

c)Trong (SAB), kẻ $HP \perp SB$ tại Q. Ta có $\dfrac{1}{HQ^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HB^2} = \dfrac{1}{15a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{16}{15a^2} \Rightarrow HQ = \dfrac{a\sqrt{15}}{4}$

Ta dễ dàng chứng minh được $HQ \perp (SBC) \Rightarrow d\left(H;(SBC)\right) = HQ$

Ta có $AH \cap (SBC) = B \Rightarrow \dfrac{d\left(A;(SBC)\right)}{d\left(H;(SBC)\right)} = \dfrac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = 2.HQ = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

Vì $AD//BC \Rightarrow d\left(D;(SBC)\right) = d\left(A;(SBC)\right) = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

d)Vì $AD//(SBC) \Rightarrow d(AD;SB) = d\left(AD;(SBC)\right) = d\left(A;(SBC)\right) = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

e)Gọi N là trung điểm của KC. Trong $(ABCD)$, EQ kéo dài cắt AB tại F

Ta có $BK = 2a\sqrt{2} \Rightarrow HE = a\sqrt{2}$; $SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = a\sqrt{17}$. Ta có $AF = KN = a; HE//BK; EN//AC \Rightarrow HE \perp EN\left(do\ AC \perp BK\right)$ mà $EN \perp SH$

$\Rightarrow EN \perp (SHE) \Rightarrow (SEN) \perp (SHE)$. Trong (SHE), kẻ $HR \perp SE \Rightarrow HR \perp (SEN) \Rightarrow HR = d\left(H;(SEN)\right)$.Ta có $HR = \dfrac{HS.HE}{SE} = \dfrac{a\sqrt{30}}{\sqrt{17}}$ Vì $AC//(SEN) \Rightarrow d(SE;AC) = d\left(AC;(SEN)\right) = d\left(A;(SEN)\right)$

Mà $AH \cap (SEN) = F \Rightarrow \dfrac{d\left(\text{A};(SEN)\right)}{d\left(\text{H};(SEN)\right)} = \dfrac{AF}{HF} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d\left(\text{A};(SEN)\right) = \dfrac{a\sqrt{30}}{2\sqrt{17}}$ .Vậy $d(SE;AC) = \dfrac{a\sqrt{30}}{2\sqrt{17}}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD > AB = 2a$. Gọi M là trung điểm CD. Tam giác SAM cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.Biết $\left(SD;(ABCD)\right) = \alpha$ với $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{6a}{\sqrt{5}}$.

a)Tính khoảng cách từ C đến (SAD).

b)Tính khoảng cách gĩa hai đường thẳng SA và DN, với $N \in BC$ và $CN = \dfrac{1}{3}BN$.

Giải

Gọi H là trung điểm của AM. Ta có $SH \perp (ABCD)$. Suy ra $(SD;(ABCD)) = SDH = \alpha$. Gọi I là trung điểm của $DM \Rightarrow HI // AD \Rightarrow HI \perp CD$ mà $CD \perp SH \Rightarrow CD \perp (SHI) \Rightarrow (SCD) \perp (SHI)$. Trong (SHI), kẻ $HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SCD) \Rightarrow HK = d(H;(SCD))$. Mà $AH \cap (SCD) = M \Rightarrow \dfrac{d(H;(SCD))}{d(A;(SCD))} = \dfrac{HM}{AM} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $HK = \dfrac{1}{2} d(A;(SCD)) = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$.

Đặt $AM = 2x > 0 \Rightarrow DH = x$ và $AD = \sqrt{4x^2 - a^2}$ $\left(x > \dfrac{a}{2}\right) \Rightarrow IH = \dfrac{\sqrt{4x^2 - a^2}}{2}$

ΔSHD vuông tại H nên $\sin\alpha = \sin SDH = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \tan\alpha = 2\sqrt{2} \Rightarrow SH = DH.\tan\alpha = 2\sqrt{2}x$

ΔSHI vuông tại H có HK là đường cao nên

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow \frac{5}{9a^2} = \frac{1}{8x^2} + \frac{4}{4x^2 - a^2} \Leftrightarrow 160x^4 - 364a^2x^2 + 9a^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{9}{4}a^2 \\ x^2 = \dfrac{1}{40}a^2\ (l) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}a$. Từ đây ta có $AD = 2\sqrt{2}a; DH = \dfrac{3}{2}a; SH = 3\sqrt{2}a$

a) Trong $(ABCD)$, gọi J là trung điểm của $AD \Rightarrow AD \perp HJ$; mà $AD \perp SH \Rightarrow AD \perp (SHJ) \Rightarrow (SAD) \perp (SHJ)$. Trong (SHJ), kẻ $HP \perp SJ$, ta có $HP \perp (SAD) \Rightarrow HP = d(H;(SAD))$

Ta có $HJ = \dfrac{a}{2}; SJ = \dfrac{\sqrt{73}}{2}a \Rightarrow HP = \dfrac{HJ.HS}{SJ} = \dfrac{3\sqrt{146}a}{73}$ Mà $CM \cap (SAD) = D \Rightarrow \dfrac{d(C;(SAD))}{d(M;(SAD))} = \dfrac{CD}{MD} = 2$

Và $MH \cap (SAD) = A \Rightarrow \dfrac{d(M;(SAD))}{d(H;(SAD))} = \dfrac{MA}{HA} = 2$ Vậy $d(C;(SAD)) = 4d(H;(SAD)) = 4HP = \dfrac{12\sqrt{146}}{73}a$.

b)Trong $(ABCD)$, $DN \cap AM = L$. Dựng hình bình hành $ADNT$. Ta có: $CN = \dfrac{1}{3}BN \Rightarrow CN = \dfrac{1}{4}BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

Ta có $\tan LDM = \dfrac{CN}{CD} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{DM}{AD} = \tan DAM \Rightarrow LDM = DAM \Rightarrow LDM + DML = 90^0$

Suy ra ΔDLM vuông tại $L \Rightarrow AM \perp DN \Rightarrow AT \perp AM$ mà $AT \perp SH \Rightarrow AT \perp (SHA) \Rightarrow AT \perp SA$ và $(SAT) \perp (SHA)$. Trong (SHA), kẻ $HQ \perp SA \Rightarrow HQ \perp (SAT) \Rightarrow HQ = d(H;(SAT))$.

Ta có $SA = \sqrt{SH^2 + HA^2} = \dfrac{9}{2}a; AT = DN = \sqrt{CD^2 + CN^2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow HQ = \dfrac{HS.HA}{SA} = a\sqrt{2}$

ΔDLM vuông tại $L \Rightarrow LM = DM.\sin LDM = DM.\dfrac{CN}{DN} = \dfrac{a}{3} \Rightarrow AL = AM - LM = \dfrac{8}{3}a$ mà

Vì $DN // (SAT) \Rightarrow d(DN;SA) = d(DN;(SAT)) = d(L;(SAT))$ mà

$LH \cap (SAT) = A \Rightarrow \dfrac{d(L;(SAT))}{d(H;(SAT))} = \dfrac{LA}{HA} = \dfrac{16}{9} \Rightarrow d(L;(SAT)) = \dfrac{16}{9}HQ = \dfrac{16a\sqrt{2}}{9}$

$\Rightarrow d(SA;DN) = \dfrac{16a\sqrt{2}}{9}$.