

THỂ TÍCH .

Môn học: Toán; lớp: 11.
Thời gian thực hiện: 2 tiết (77,78)

I. Mục tiêu

1. Về kiến thức

- Định nghĩa về thể tích.
- Thể tích của khối chóp, khối chóp cụt đều, khối lăng trụ, khối hộp.
- Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với việc tính thể tích các khối để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

2. Về năng lực

- Năng lực mô hình hóa toán học: Xác định được đáy và đường cao khối chóp, khối chóp cụt đều, khối lăng trụ, khối hộp.
- Năng lực giao tiếp toán học: Trình bày, diễn đạt, nêu câu hỏi, trả lời câu hỏi, thảo luận, tranh luận để tìm được kết quả chính xác.
- Năng lực tư duy và lập luận toán học: Dùng các kiến thức đã biết để tính diện tích các đa giác đáy và độ dài đường cao, từ đó tính được thể tích các khối tương ứng và có thể áp dụng chúng để giải quyết các bài toán thực tiễn.
- Sử dụng công cụ và phương tiện học toán: Dùng máy tính cầm tay để hỗ trợ tính toán.

3. Về phẩm chất:

- Độc lập: Biết cách học độc lập với phương pháp thích hợp.
- Trách nhiệm: Biết chia sẻ, có trách nhiệm với bản thân, gia đình, cộng đồng.
- Chăm chỉ: Người học chăm chỉ trong học tập.
- Thế giới quan khoa học: Hiểu được nguồn gốc thực tiễn và khả năng ứng dụng rộng rãi của thể tích trong đời sống.

II. Thiết bị dạy học và học liệu

- **Giáo viên:** Bảng vuông, hạt, giấy A0, A4; máy tính và máy chiếu.
- **Học sinh:** Bút màu, bút chì, máy tính cầm tay.

III. Tiến trình dạy học.

Tiết 1

Thể tích là một trong những khái niệm toán học xuất hiện thường xuyên trong cuộc sống, đo sự chiếm chỗ của vật thể trong không gian. Bài học này đưa ra công thức thể tích của các hình khối ứng với các hình mà ta đã học.

* Hoạt động khởi động

a. **Mục tiêu:** Học sinh tiếp cận khái niệm thể tích thông qua ví dụ mở đầu.

b. **Nội dung:**

* **Nhiệm vụ 1:** Học sinh xem bức tranh (Hình 7.92), đọc đề bài và xác định nhiệm vụ.

* **Nhiệm vụ 2:** HS xác định rõ yêu cầu của bài toán.

» **HD1.** Khi mua máy điều hòa, bác An được hướng dẫn rằng mỗi mét khối của phòng cần công suất điều hoà khoảng 200 BTU. Căn phòng bác An cần lắp máy có dạng hình hộp chữ nhật, rộng 4m, dài 5m và cao 3m. Hỏi bác An cần mua loại điều hoà có công suất bao nhiêu BTU?



Hình 7.92

c. **Sản phẩm:**

- + Học sinh báo cáo nhận xét qua hình ảnh, yêu cầu của bài là tính thể tích căn phòng.
- + Học sinh đưa ra công thức đã học ở lớp dưới, tính toán và nêu kết quả.

Lời giải

- + Ta có: Thể tích căn phòng (khối hộp chữ nhật) là $V = a.b.c = 4.5.3 = 60 (m^3)$.
- + Bác An cần mua loại điều hoà có công suất là $60.200 = 12.000$ BTU.

d. **Tổ chức thực hiện:**

Chuyển giao	Giáo viên cho HS xem tranh và nội dung bài toán.
Thực hiện	Học sinh quan sát thảo luận và đặt các câu hỏi (theo cá nhân hoặc đại diện mỗi nhóm.)

Báo cáo thảo luận	Học sinh trả lời, thảo luận, hoàn thiện sản phẩm.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV nhận xét các câu trả lời. Giáo viên giới thiệu bài học và mục tiêu bài học.

*** Hoạt động hình thành kiến thức:**

a. Mục tiêu: Học sinh hình thành khái niệm thể tích của khối chóp, khối chóp cắt đều, khối lăng trụ, khối hộp thông qua các yêu cầu thực tiễn.

b. Nội dung:

+ GV cung cấp các công thức liên quan

+ HS tiếp nhận công thức tính qua hình vẽ và 1 số ví dụ mô tả trong thực tế.

c. Sản phẩm:

+ Học sinh ghi chép công thức, đặt ra các câu hỏi (nếu có).

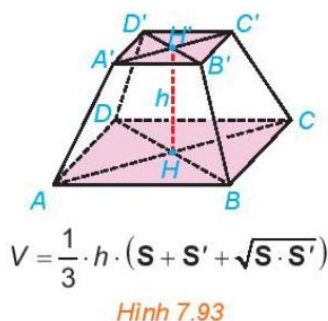
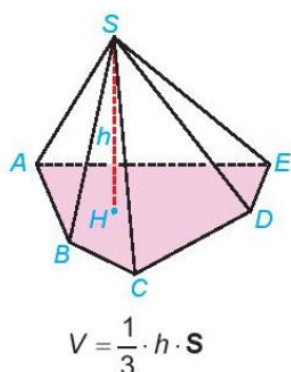
Phần không gian được giới hạn bởi hình chóp, hình chóp cắt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng được gọi là **khối chóp**, **khối chóp cắt đều**, **khối lăng trụ**, **khối hộp**. Đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của các khối hình đó lần lượt là đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của hình chóp, hình chóp cắt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng.

- Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S$.

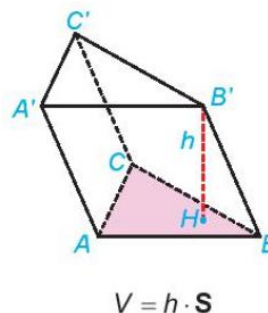
- Thể tích của khối chóp cắt đều có diện tích đáy lớn S , diện tích đáy bé S' và chiều cao h là

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$$

- Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = h \cdot S$.



Hình 7.93



Nhận xét:

- Thể tích khối tứ diện bằng một phần ba tích của chiều cao từ một đỉnh và diện tích mặt đối diện với đỉnh đó.

- Thể tích của khối hộp bằng tích của diện tích một mặt và chiều cao của khối hộp ứng với mặt đó.

d. Tổ chức thực hiện:

Chuyển giao	Giáo viên cho HS xem tranh và nội dung các công thức.
Thực hiện	Học sinh ghi chép quan sát thảo luận và đặt các câu hỏi (theo cá nhân hoặc đại diện mỗi nhóm.)
Báo cáo thảo luận	Học sinh trả lời, thảo luận, hoàn thiện sản phẩm.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV đưa ra các nhận xét ghi chú của các trường hợp đặc biệt.

*** Hoạt động luyện tập 1:**

a. Mục tiêu: Học sinh luyện tập tính thể tích các khối thông qua hoạt động nhóm.

b. Nội dung:

* **Nhiệm vụ 1:** Học sinh các nhóm nhận nhiệm vụ giải các bài toán ở ví dụ 1,2,3 sgk.

* **Nhiệm vụ 2:** HS thảo luận, trình bày và báo cáo bài toán.

c. Sản phẩm:

+ Học sinh báo cáo nhận xét qua phần trình bày của nhóm mình, HS khác nhận xét, bổ sung.

» **Ví dụ 1.** Cho khối tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông nhau và $OA = a, OB = b, OC = c$. Tính thể tích của khối tứ diện.

Giải. (H.7.94) Tam giác vuông OBC có diện tích là $S_{OBC} = \frac{1}{2}bc$.

OA vuông góc với mặt phẳng (OBC) nên tứ diện $OABC$ có chiều cao ứng A bằng OA .

Vậy thể tích của khối tứ diện là $V_{OABC} = \frac{1}{3}AO \cdot S_{OBC} = \frac{1}{6}abc$.

» **Ví dụ 2.** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là các tam giác đều cạnh $(ACC'A')$ vuông góc với hai mặt đáy, tam giác $A'AC$ cân tại A và $AA' = b$ ($a < 2b$). Tính thể tích của khối lăng trụ.

Giải. (H.7.95)

Gọi $A'H$ là đường cao của tam giác cân $A'AC$. Khi đó, H là trung điểm AC .

Do $(ACC'A') \perp (ABC)$ và $A'H \perp AC$ nên $A'H \perp (ABC)$.

Vậy khối lăng trụ có chiều cao là $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Tam giác đều ABC có diện tích là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy khối lăng trụ có thể tích là $V = A'H \cdot S_{ABC} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3(4b^2 - a^2)}}{8}$.

» **Ví dụ 3.** Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 8\text{cm}, AD = 5\text{cm}, AA' = 6\text{cm}, \angle BAD = 30^\circ$, góc giữa AA' và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính thể tích của khối hộp.

Giải. (H.7.97)

Hình bình hành $ABCD$ có diện tích là

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2\left(\frac{1}{2}AB \cdot AD \sin \angle BAD\right) = 20(\text{cm}^2).$$

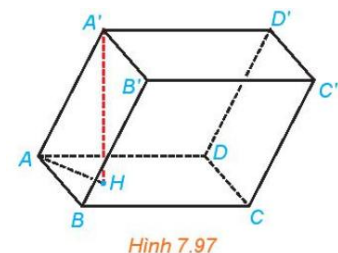
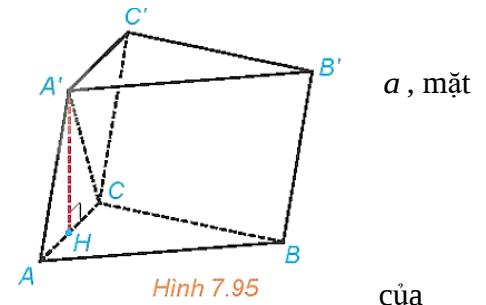
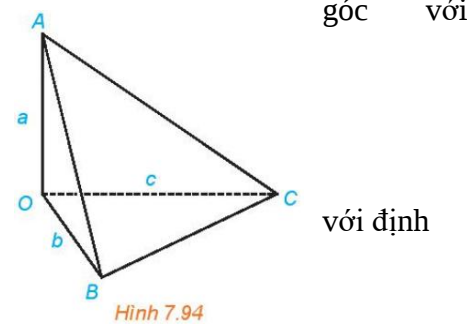
Gọi H là hình chiếu của A' trên $(ABCD)$. Khi đó, $\angle A'AH$ bằng góc

$(ABCD)$ nên $\angle A'AH = 45^\circ$. Trong tam giác vuông $A'AH$, ta có

$$A'H = A'A \cdot \sin \angle A'AH = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}(\text{cm}).$$

Khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao tương ứng với mặt $ABCD$ bằng $A'H = 3\sqrt{2}(\text{cm})$.

Do đó, thể tích của khối hộp là $V = A'A \cdot S_{ABCD} = 60\sqrt{2}(\text{cm}^3)$.



d. Tổ chức thực hiện:

Chuyển giao	GV chia nhóm, giao nhiệm vụ tính thể tích các khối thông qua yêu cầu của từng nhóm VD 1,2,3.
Thực hiện	Học sinh các nhóm nhận nhiệm vụ giải các bài toán ở ví dụ 1,2,3 sgk.

	HS thảo luận, trình bày và báo cáo bài toán.
Báo cáo thảo luận	Học sinh trả lời, thảo luận, hoàn thiện sản phẩm.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV nhận xét các câu trả lời. Giáo viên chốt lại kiến thức cần ghi nhớ, khắc sâu mục tiêu bài học.

Tiết 2

* Hoạt động luyện tập 2:

a. Mục tiêu: Học sinh luyện tập tính thể tích các khối thông qua hoạt động luyện tập cá nhân.

b. Nội dung:

* **Nhiệm vụ 1:** Học sinh lần lượt giải các bài toán ở nhiệm vụ luyện tập 1,2 sgk.

* **Nhiệm vụ 2:** HS trình bày và chuẩn bị báo cáo nội dung bài toán.

c. Sản phẩm:

+ Học sinh báo cáo nhận xét qua phần trình bày của cá nhân mình, HS khác nhận xét, bổ sung.

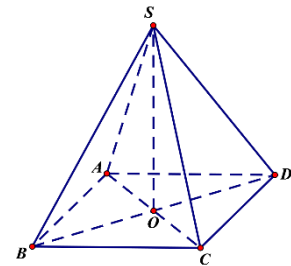
» **Luyện tập 1.** Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b . Tính thể tích của khối chóp.

Giải

Gọi O tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Cạnh bên $SB = b$; $BD = \sqrt{2}a$, $OB = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.



Xét tam giác vuông SOB : $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - 2a^2}$.

Chiều cao $h = SO = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - 2a^2}$.

Thể tích khối chóp đều $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - 2a^2} = \frac{1}{6}a^2 \cdot \sqrt{4b^2 - 2a^2}$.

» **Luyện tập 2.** Cho khối chóp cụt đều $ABC \cdot A'B'C'$ có đường cao $HH' = h$, hai mặt đáy $ABC, A'B'C'$ có cạnh tương ứng bằng $2a, a$.

a) Tính thể tích khối chóp cụt.

b) Gọi B_1, C_1 tương ứng là trung điểm của AB, AC . Chứng minh rằng $AB_1C_1 \cdot A'B'C'$ là một hình lăng trụ. Tính thể tích khối lăng trụ $AB_1C_1 \cdot A'B'C'$.

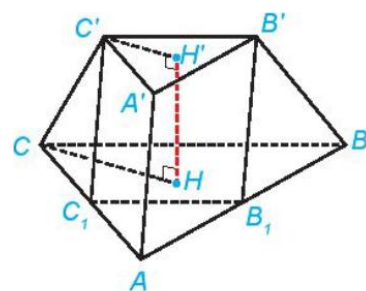
Giải

a) Diện tích đáy ABC là $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}(2a)^2}{4} = \sqrt{3}a^2$

Diện tích đáy $A'B'C'$ là $S_{A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

Thể tích khối chóp cụt đều là

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(\sqrt{3}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \sqrt{\sqrt{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2} \right) = \frac{7\sqrt{3}ha^2}{12}.$$



Hình 7.96

b) Ta có: $(ABC) \parallel (A'B'C') \Rightarrow (AB_1C_1) \parallel (A'B'C')$ (1).

Mặt khác, B_1, C_1 tương ứng là trung điểm của $AB, AC \Rightarrow AB_1C_1$ là tam giác đều cạnh a . Khi đó $\Delta AB_1C_1 = \Delta A'B'C'$ (2).

Từ (1) và (2): $AB_1C_1 \cdot A'B'C'$ là một hình lăng trụ có diện tích đáy $S_{A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, chiều cao h .

Thể tích khối lăng trụ $AB_1C_1 \cdot A'B'C'$ là $V = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot h$

d. Tổ chức thực hiện:

Chuyển giao	GV giao nhiệm vụ luyện tập tính thể tích các khối thông qua hoạt động luyện tập cá nhân.
Thực hiện	HS trình bày và chuẩn bị báo cáo nội dung bài toán. Học sinh báo cáo nhận xét qua phần trình bày của cá nhân mình, HS khác nhận xét, bổ sung
Báo cáo thảo luận	Học sinh trả lời, thảo luận, hoàn thiện sản phẩm.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV nhận xét các câu trả lời. Giáo viên chốt lại kiến thức cần ghi nhớ, khắc sâu mục tiêu bài học.

*) Hoạt động vận dụng 1

a. **Mục tiêu:** Vận dụng các kiến thức đã học giải quyết bài toán trong thực tế.

b. **Nội dung:**

* **Nhiệm vụ: Bài tập vận dụng (SGK)**

➤ **Vận dụng:** Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều (H.7.98)

Đáy và miệng sọt là các hình vuông tương ứng có cạnh bằng 60 cm, 30 cm, của sọt dài 50 cm. Tính thể tích của sọt.



cạnh bên

Hình 7.98

c. Sản phẩm:

Giải

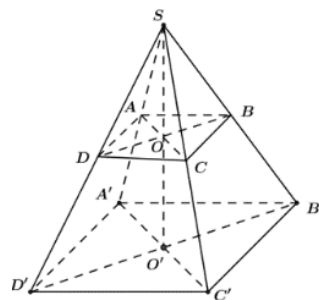
Giả sử khối chóp cụt đều là $ABCD.A'B'C'D'$. Với hình chóp đều $S.ABCD$. O, O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$.

Diện tích đáy sọt là $S_{ABCD} = 30^2 = 900 \text{ cm}^2$.

Diện tích miệng sọt là $S_{A'B'C'D'} = 60^2 = 3600 \text{ cm}^2$.

Ta có: $\frac{SA}{SA'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \Rightarrow A$ là trung điểm của SA' . Khi đó

$SA' = 2AA' = 2 \cdot 50 = 100 \text{ cm}$.



Ta có: $A'C' = \sqrt{2} \cdot 60 \text{ cm} \Rightarrow O'A' = \sqrt{2} \cdot 30 \text{ cm}$. Suy ra $SO' = \sqrt{SA'^2 - O'A'^2} = 10\sqrt{82} \text{ cm}$.

Chiều cao của hình chóp cụt đều là $h = OO' = \frac{1}{2} SO' = 5\sqrt{82} \text{ cm}$.

Vậy thể tích khối chóp cụt đều là

$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + S' + \sqrt{S \cdot S'}) = \frac{1}{3} \cdot 5\sqrt{82} \cdot (900 + 3600 + \sqrt{900 \cdot 3600}) \approx 95082 \text{ (cm}^3\text{)}.$

d. Tổ chức thực hiện:

Chuyển giao	GV giao nhiệm vụ và phân tích nội dung bài toán thực tiễn, hỗ trợ HS theo từng đối tượng.
Thực hiện	HS suy nghĩ thực hiện theo hướng dẫn của GV
Báo cáo thảo luận	HS trình bày lời giải, HS thảo luận, nhận xét, sửa chữa (nếu có)

Đánh giá, nhận xét, tổng hợp

GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của học sinh, ghi nhận và tuyên dương học sinh có câu trả lời tốt nhất.

***) Hoạt động vận dụng 2**

a. Mục tiêu: Rèn luyện các kỹ năng từ đó củng cố lại các kiến thức đã được học trong bài học. Vận dụng các kiến thức đã học giải quyết bài toán trong thực tế.

b. Nội dung:

* **Nhiệm vụ 1: Bài tập trắc nghiệm phiếu học tập** (xem phiếu bài tập tại phần phụ lục)

* **Nhiệm vụ 2: Luyện tập để củng cố các kiến thức** (bài 7.28;7.29;7.30;7.31;7.32 SGK)

c. Sản phẩm:

* **Nhiệm vụ 1: PHIẾU HỌC TẬP SỐ 2**

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC với $AB = 5cm$, $AC = 12cm$, $BC = 13cm$, $SA = 3cm$, $SA \perp (ABC)$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 60cm^3$. **B.** $V = 180cm^3$. **C.** $V = 90cm^3$. **D.** $V = 30cm^3$.

Câu 2. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = 3a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = a^3$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **C.** $V = 2\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 2a^3$.

Câu 3. Một hình lăng trụ có đáy là hình vuông, có thể tích V , chiều cao h . Độ dài a của cạnh đáy là

A. $a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$. **B.** $a = \sqrt{\frac{V}{h}}$. **C.** $a = \sqrt{\frac{h}{V}}$. **D.** $a = \sqrt{\frac{h}{3V}}$.

Câu 4. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b .

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^2b}{3}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{2}a^2b}{4}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{3}a^2b}{2}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{3}a^2b}{4}$.

Câu 5. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3}{6}$. **C.** $V = \frac{a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. $AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại A .

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 (cm^3).$$

Câu 2. $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot a \cdot 2a = 2a^3$.

Câu 3. Diện tích đáy $S = a^2$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ là: } V = S \cdot h = a^2 \cdot h \Rightarrow a = \sqrt{\frac{V}{h}}.$$

Câu 4. Diện tích đáy $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, chiều cao $h = b$.

$$\text{Thể tích khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng } a, \text{ cạnh bên bằng } b \text{ là: } V = S \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot b = \frac{\sqrt{3}a^2b}{4}.$$

Câu 5. Gọi H là trọng tâm của $\Delta ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Ta có: đường thẳng AH là hình chiếu của đường thẳng SA lên (ABC)

$$\Rightarrow ((SA); (ABC)) = (SA; AH) = \angle SAH = 60^\circ.$$

Ta có: $AH = \frac{2}{3} AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Xét $\triangle SHA$ vuông tại H : $SH = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a.$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

* Nhiệm vụ 2: BÀI TẬP SGK

7.28. Cho khối chóp đều $S.ABC$ đáy có cạnh bằng a , cạnh bên bằng b . Tính thể tích của khối chóp đó. Từ đó suy ra thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng a .

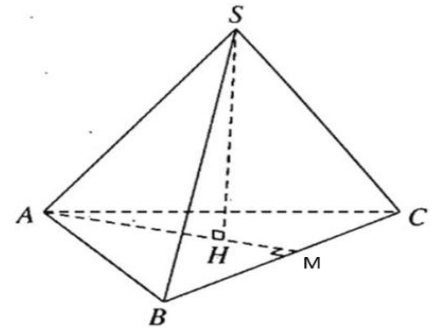
Lời giải

Diện tích đáy ABC là $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC . Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên khi đó $SH \perp (ABC)$. Với M là trung điểm của $BC \Rightarrow AH = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}.$

Ta có: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{9b^2 - 3a^2}.$

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{9b^2 - 3a^2} = \frac{1}{12} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3b^2 - a^2}$

Thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng a là $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3.$



7.29. Cho khối lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có $AA' = 5\text{cm}$, $AB = 6\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$, $\angle ABC = 150^\circ$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Lời giải

Diện tích đáy ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \sin 150^\circ = 3\text{cm}^2$

Chiều cao $h = AA' = 5\text{cm}.$

Thể tích khối lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ là $V = S_{ABC} \cdot h = 3 \cdot 5 = 15\text{cm}^3$

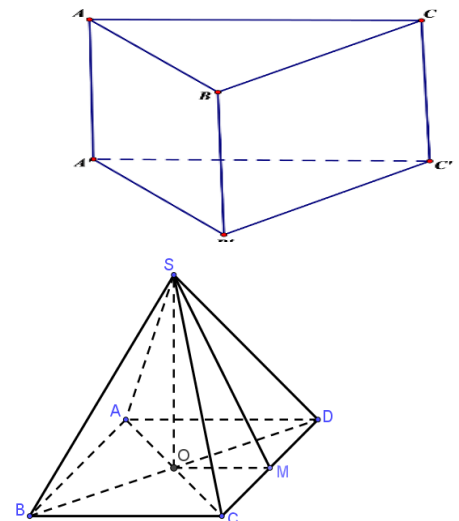
7.30. Cho khối chóp đều $S.ABCD$, đáy có cạnh 6cm . Tính thể tích của khối chóp đó trong các trường hợp sau:

a) Cạnh bên tạo với mặt đáy một góc bằng 60° .

b) Mặt bên tạo với mặt đáy một góc bằng 45° .

Lời giải

a) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = 6^2 = 36\text{cm}^2.$



Cạnh bên SA tạo với mặt đáy một góc bằng $\angle SAO = 60^\circ$.

Ta có: $AC = \sqrt{2}.6 \text{ (cm)} \Rightarrow OA = 3\sqrt{2} \text{ (cm)} \Rightarrow SO = OA \tan 60^\circ = 3\sqrt{2}.\sqrt{3} = 3\sqrt{6} \text{ (cm)}$.

Chiều cao $SO = 3\sqrt{6} \text{ (cm)}$.

Vậy thể tích khối chóp đều $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.36.3\sqrt{6} = 36\sqrt{6} \text{ (cm}^3\text{)}$.

b) Gọi M là trung điểm của CD khi đó $OM \perp CD$, $CD \perp SO \Rightarrow CD \perp (SOM)$. Suy ra $CD \perp SM$.

Góc tạo bởi (SCD) và $(ABCD)$ bằng $\angle SMO = 45^\circ$.

Ta có: $OM = \frac{1}{2}BC = 3$, $SO = OM \tan 45^\circ = OM = 3$.

Vậy thể tích khối chóp đều $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.36.3 = 36 \text{ (cm}^3\text{)}$

7.31. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là các tam giác đều cạnh a , $A'A = A'B = A'C = b$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Lời giải

Gọi H trọng tâm của tam giác ABC , vì tam giác ABC là tam giác đều nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Mặt khác $A'A = A'B = A'C$ suy ra $A'H \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của BC , khi đó $AM = \frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

Xét tam giác vuông AHA' , ta có: $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9b^2 - 3a^2}$.

Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, chiều cao $h = A'H = \frac{1}{3}\sqrt{9b^2 - 3a^2}$

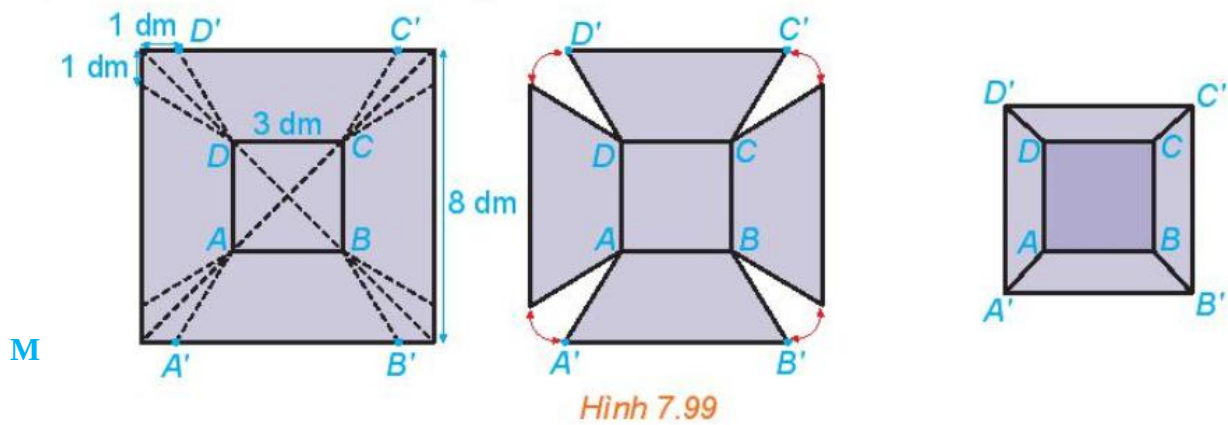
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{9b^2 - 3a^2} = \frac{1}{4}.a^2\sqrt{3b^2 - a^2}$

7.32. Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh 8dm, bác Hùng cắt bỏ bốn phần như nhau ở bốn góc, sau đó bác hàn các mép lại để được một chiếc thùng (không có nắp) như Hình 7.99.

a) Giải thích vì sao chiếc thùng có dạng hình chóp cụt.

b) Tính cạnh bên của thùng.

c) Hỏi thùng có thể chứa được nhiều nhất bao nhiêu lít nước?

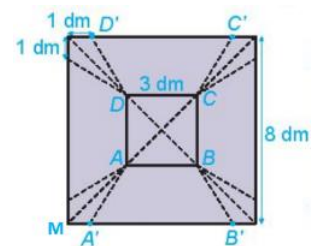


Lời giải

a) Ta có $ABCD, A'B'C'D'$ đều là hình vuông có các cạnh lần lượt là $3\text{dm}, 6\text{dm}$. Các cạnh AA', BB', CC', DD' bằng nhau. Khi đó hình $ABCD.A'B'C'D'$ là hình chóp cắt đều.

b) Ta có $AC = 3\sqrt{2}\text{dm}$, đường chéo miềng tôn hình vuông là $8\sqrt{2}$. Gọi miềng tôn hình vuông, $AM = \frac{8\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\text{dm}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác $A'M$:



M đỉnh của

$$A'A^2 = AM^2 + A'M^2 - 2AM \cdot A'M \cdot \cos 45^\circ = 1^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{17}{2} \Rightarrow A'A = \frac{\sqrt{34}}{2}\text{dm}.$$

c) Giả sử hình chóp cắt đều $ABCD.A'B'C'D'$ tạo bởi hình chóp đều $S.A'B'C'D'$ (như hình vẽ)

Ta có: $\frac{SA}{SA'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow A$ là trung điểm của SA' . Khi đó $SA' = 2AA' = \sqrt{34}\text{dm}$.

Ta có: $A'C' = 6\sqrt{2}\text{dm} \Rightarrow O'A' = 3\sqrt{2}\text{dm}$. Suy ra $SO' = \sqrt{SA'^2 - O'A'^2} = 4\text{dm}$.

Chiều cao của hình chóp cắt đều là $h = OO' = \frac{1}{2}SO' = 2\text{dm}$.

Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = 3^2 = 9\text{dm}^2$.

Diện tích đáy $A'B'C'D'$ là $S'_{A'B'C'D'} = 6^2 = 36\text{dm}^2$.

Vậy thể tích của khối chóp cắt đều là $V = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (9 + 36 + \sqrt{9 \cdot 36}) = 42\text{dm}^3$.

Thùng chứa được nhiều nhất 42 lít nước.

d. Tổ chức thực hiện:

Chuyển giao	-Nhiệm vụ 1: GV đưa BTTN và yêu cầu HS trả lời nhanh
-------------	--

	-Nhiệm vụ 2: GV chia nhóm, yêu cầu các nhóm làm các bài tập 7.28;7.29;.7.30 - GV hướng dẫn cách giải các BT còn lại.
Thực hiện	GV giao nhiệm vụ, điều hành, quan sát, hướng dẫn và hỗ trợ cho học sinh (nếu có) HS thực hiện theo yêu cầu của GV.
Báo cáo thảo luận	-Nhiệm vụ 1: HS trả lời nhanh -Nhiệm vụ 2: HS nộp sản phẩm (lời giải các bài tập cho GV), đại diện các nhóm lần lượt lên bảng trình bày lời giải, các nhóm còn lại thảo luận, nhận xét, sửa chữa (nếu có) - HS theo sự hướng dẫn của GV đưa ra cách giải các BT còn lại.
Đánh giá, nhận xét, tổng hợp	GV nhận xét thái độ làm việc, phương án trả lời của các nhóm học sinh, ghi nhận và tuyên dương nhóm học sinh có câu trả lời tốt nhất.

PHỤ LỤC HỒ SƠ DẠY HỌC

I. Các phiếu học tập:

PHIẾU HỌC TẬP SỐ 1

Nhóm 1

» **Ví dụ 1.** Cho khối tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a, OB = b, OC = c$. Tính thể tích của khối tứ diện.

Nhóm 2

» **Ví dụ 2.** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là các tam giác đều cạnh a , mặt $(ACC'A')$ vuông góc với hai mặt đáy, tam giác $A'AC$ cân tại A và $AA' = b$ ($a < 2b$). Tính thể tích của khối lăng trụ.

Nhóm 3

» **Ví dụ 3.** Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 8\text{cm}, AD = 5\text{cm}, AA' = 6\text{cm}, \angle BAD = 30^\circ$, góc giữa AA' và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính thể tích của khối hộp.

PHIẾU ĐÁNH GIÁ

Nhóm	Hình vẽ	Lời giải đúng	Kỹ năng thuyết trình (1-10)	Ghi chú
Nhóm 1				
Nhóm 2				
Nhóm 3				

PHIẾU HỌC TẬP SỐ 2

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC với $AB = 5\text{cm}, AC = 12\text{cm}, BC = 13\text{cm}, SA = 3\text{cm}, SA \perp (ABC)$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 60\text{cm}^3$. **B.** $V = 180\text{cm}^3$. **C.** $V = 90\text{cm}^3$. **D.** $V = 30\text{cm}^3$.

Câu 2. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a, AD = 2a, SA \perp (ABCD), SA = 3a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = a^3$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **C.** $V = 2\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 2a^3$.

Câu 3. Một hình lăng trụ có đáy là hình vuông, có thể tích V , chiều cao h . Độ dài a của cạnh đáy là

A. $a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$.

B. $a = \sqrt{\frac{V}{h}}$.

C. $a = \sqrt{\frac{h}{V}}$. **D.** $a = \sqrt{\frac{h}{3V}}$.

Câu 4. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng b .

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^2b}{3}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{2}a^2b}{4}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{3}a^2b}{2}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{3}a^2b}{4}$.

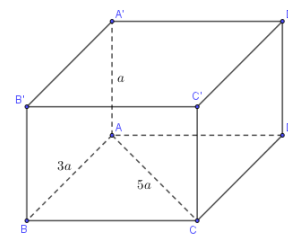
Câu 5. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

B. $V = \frac{a^3}{6}$.

C. $V = \frac{a^3}{3}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.



PHIẾU HỌC TẬP SỐ 3

Nhóm 1

7.28. Cho khối chóp đều $S.ABC$ đáy có cạnh bằng a , cạnh bên bằng b . Tính thể tích của khối chóp đó. Từ đó suy ra thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng a .

Nhóm 2

7.29. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 5\text{cm}$, $AB = 6\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$, $\angle ABC = 150^\circ$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Nhóm 3

7.30. Cho khối chóp đều $S.ABCD$, đáy có cạnh 6cm . Tính thể tích của khối chóp đó trong các trường hợp sau:

a) Cạnh bên tạo với mặt đáy một góc bằng 60° .

b) Mặt bên tạo với mặt đáy một góc bằng 45° .

PHIẾU ĐÁNH GIÁ

Nhóm	Hình vẽ	Lời giải đúng	Kỹ năng thuyết trình (1-10)	Ghi chú
Nhóm 1				
Nhóm 2				
Nhóm 3				

II. Bài tập bổ sung

A. Phần trắc nghiệm

* Nhận biết

Câu 1. Cho khối tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc và $OA = a$; $OB = b$; $OC = c$. Thể tích khối tứ diện $OABC$ được tính theo công thức nào sau đây

A. $V = \frac{1}{6}a.b.c$.

B. $V = \frac{1}{3}a.b.c$.

C. $V = \frac{1}{2}a.b.c$.

D. $V = 3a.b.c$.

Lời giải

$$V_{OABC} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}.OA.\frac{1}{2}OB.OC = \frac{1}{6}a.b.c$$

Câu 2. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a$, $AB = 3a$, $AC = 5a$. Thể tích khối hộp đã cho là

A. $5a^3$.

B. $4a^3$.

C. $12a^3$.

D. $15a^3$.

Lời giải

Tam giác ABC vuông tại B nên $BC^2 + AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 4a$.

Vậy thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = AA'.S_{ABCD} = AA'.AB.BC = a.3a.4a = 12a^3$.

Câu 3. Thể tích khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

C.

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Chọn A

Ta có:

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}a; SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Câu 4. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ tam giác đều cạnh $4a$.

A. $V = 12a^3$.

B. $V = 20a^3\sqrt{3}$.

C. $V = 20a^3$.

D. $V = 12a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Tam giác ABC đều nên diện tích $S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 4a^2\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông ACC' , ta có

$$CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{25a^2 - 16a^2} = 3a.$$

Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ là

$$V = CC' \cdot S_{\triangle ABC} = 12a^3\sqrt{3}.$$

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{2}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{14}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{11}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{11}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Xét tam giác vuông SOB có $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$

$$= \sqrt{4a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD}$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{14}}{6}.$$

*** Thông hiểu**

Câu 6. Tính thể tích của khối tứ diện đều cạnh $2a$.

A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

B. $2\sqrt{2}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

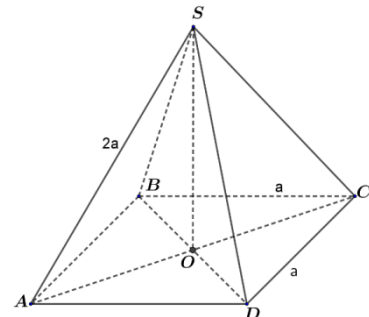
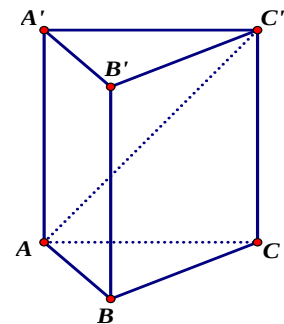
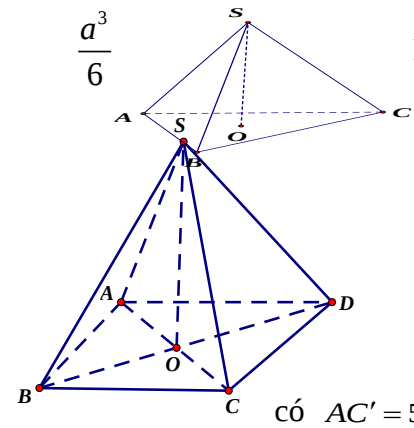
Lời giải

Chọn A

Giả sử tứ diện đều $SABC$. Gọi O là tâm của tam giác ABC . Ta có $V = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABC}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = a^2\sqrt{3}, OA = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

$$V = \frac{1}{3}SO \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}.$$



Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA = a\sqrt{15}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{6}$.

B. $V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.

C. $V = 2a^3\sqrt{15}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

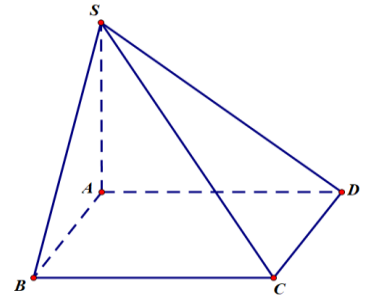
Lời giải

Chọn B

Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$, suy ra $SA \perp (ABCD)$. Do đó chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{15}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.



Câu 8. Cho hình lăng trụ tam giác đều cạnh bên bằng a , thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Tính độ dài cạnh đáy của hình lăng trụ.

A. $a\sqrt{3}$.

B. $a\sqrt{2}$.

C. $2a$.

D. $3a$.

Lời giải

Chọn B

Gọi độ dài cạnh đáy là $b \Rightarrow$ diện tích đáy là $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt).

Theo bài ra ta có: $\frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a \Leftrightarrow b^2 = 2a^2 \Leftrightarrow b = a\sqrt{2}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\triangle ABC$ đều; mặt bên SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy và $\triangle SAB$ vuông tại S , $SA = a\sqrt{3}$, $SB = a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{4}$.

B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3}{6}$.

D. $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Kẻ SH vuông góc với AB tại H .

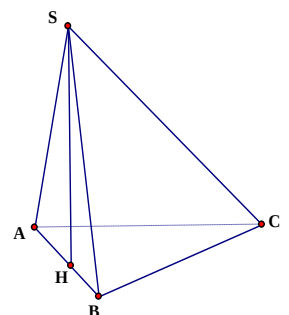
Áp dụng định lý Pi - ta - go trong $\triangle SAB$ vuông tại S , ta có:

$AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$. áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle SAB$ vuông tại S , đường cao SH , ta có:

$SH = \frac{SA \cdot SB}{AB} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$ (đvdt).

$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2\sqrt{3} = \frac{a^3}{2}$ (đvtt).



Câu 10. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , hình chiếu của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là điểm B' , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $V = a^3\sqrt{3}$.

C. $V = \frac{3a^3}{4}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra ta có:

- ☐ Diện tích đáy: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt).
- ☐ Chiều cao của khối lăng trụ là AB' .
- ☐ Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là góc $B'BA = 60^\circ$. Xét $\triangle AB'B$ vuông tại A , có: $AB' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Ta có thể tích khối lăng trụ là $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}$ (đvtt).

***Đáp án:**

Mức độ	Nhận biết					Thông hiểu				
Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	A	C	A	D	B	A	B	B	D	C

B. Phần tự luận (mức vận dụng):

Bài 1: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$,

$AB = 3a$, $AD = 2a$, $SB = 5a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a .

Lời giải

Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD}$.

Xét tam giác vuông SAB có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 4a$.

Và $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 6a^2$.

Nên $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot 6a^2 = 8a^3$.

Bài 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = a$, $AD = 3a$, $BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$, tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a .

Lời giải

Ta có $V_{S.BCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{BCD}$.

Lại có $S_{BCD} = S_{ABCD} - S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot (AD + BC) - \frac{1}{2} AB \cdot AD$
 $= \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} a^2$. Mà $SA = a\sqrt{3} \Rightarrow V_{S.BCD} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Nhận xét: Nếu đề bài bỏ giả thiết $AD = 3a$ thì sẽ giải như sau:

Ta có $V_{S.BCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{BCD} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} d(D, BC) \cdot BC = \frac{1}{6} SA \cdot AB \cdot BC = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

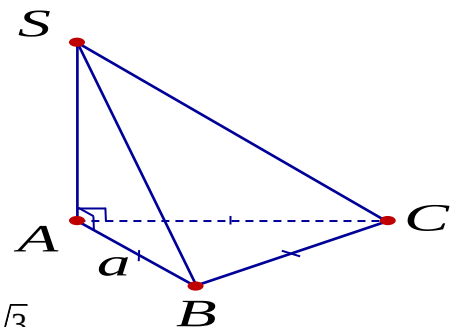
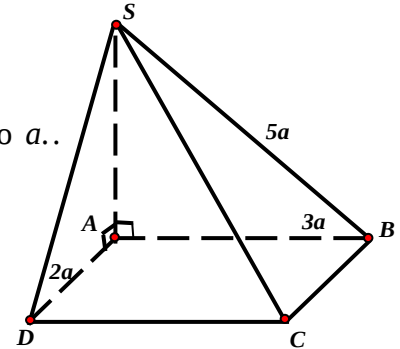
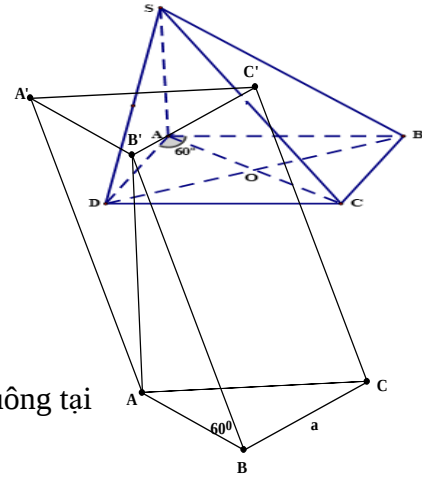
Bài 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $BAD = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Lời giải

Tam giác ABD đều, có cạnh bằng a .

Suy ra $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.



$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{a^3 \sqrt{2}}{4}.$$

Bài 4: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và SA hợp với (SBC) một góc 45° . Tính thể tích khối chóp $SABC$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm BC , dựng $AM \perp SH$

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AH$

$\Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AM$.

$\Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow SM$ là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (SBC)

$\Rightarrow ASH = 45^\circ$.

$\Rightarrow \Delta SAH$ là tam giác vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{8}$.

Bài 5: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khi đó

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp AO \\ BC \perp SO \end{cases}$$

Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc SOA hay $SOA = 30^\circ$.

Xét tam giác vuông SAO , cạnh

$$SA = AO \cdot \tan SOA = \frac{1}{2} AD \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Suy ra: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} \cdot a^2 = \frac{a^3 \sqrt{6}}{18}.$$

Bài 6: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

Gọi E là trung điểm của BC (1) và H là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó $SH \perp (ABC)$ tại H . Do (1) nên $AE \perp BC$ tại E .

Xét tam giác ABE vuông tại E :

$$AE = AB \cdot \sin ABE = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3} AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Xét tam giác } SAH \text{ vuông tại } H: SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{3}.$$

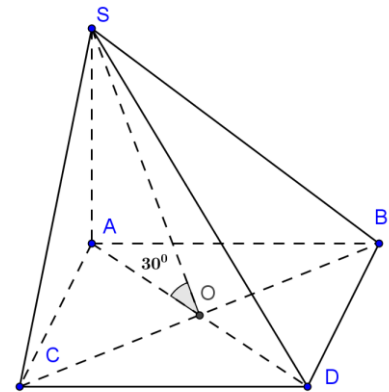
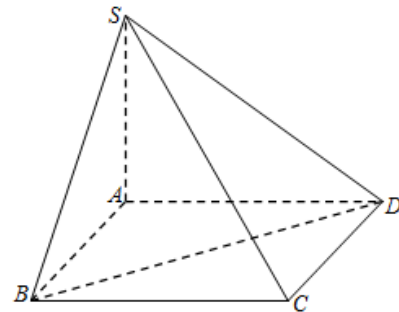
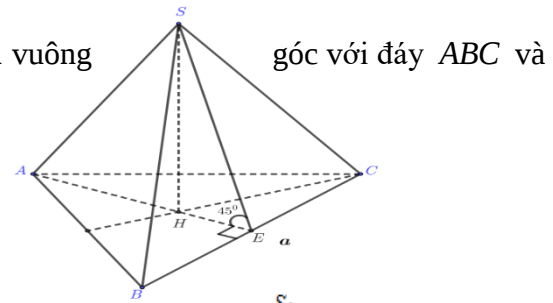
$$\text{Diện tích tam giác đều } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin ABC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là } V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{5}}{12}.$$

Bài 7: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) là 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Gọi E là trung điểm của BC và H là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó $SH \perp (ABC)$ tại H và $AE \perp BC$ tại E .

Ta có $SE \perp BC$ tại E (do tam giác SBC cân tại S).



$$\text{Ta có } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SE \perp BC, SE \subset (SBC) \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (SE, AE) = SEA = 45^\circ. \\ AE \perp BC, AE \subset (ABC) \end{cases}$$

$$\text{Xét tam giác } ABE \text{ vuông tại } E: AE = AB \cdot \sin ABE = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HE = \frac{1}{3} \cdot AE = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Xét tam giác } SHE \text{ vuông tại } H: SH = HE \cdot \tan SEA = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \tan 45^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Diện tích tam giác đều } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin ABC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là } V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{24}.$$

Bài 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{2a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

Trong $(ABCD)$, kẻ $AE \perp BD, (E \in BD)$.

Trong $(ABCD)$, kẻ $AH \perp SE, (H \in SE)$ (1)

$$\text{Vì } \begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AE \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow BD \perp AH \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A, (SBD)) = AH$.

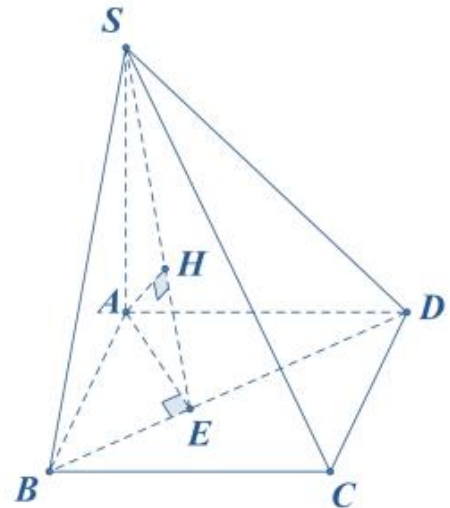
Xét $\triangle ABD$ vuông tại A có đường cao AE , ta có:

$$AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Xét $\triangle SAE$ vuông tại A có đường cao AH , ta có:

$$SA = \frac{AH \cdot AE}{\sqrt{AE^2 - AH^2}} = \frac{\frac{2a}{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{4a^2}{5} - \frac{4a^2}{9}}} = a$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot AD \cdot SA = \frac{2a^3}{3}.$$



Bài 9: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = a, AC = a\sqrt{3}$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng mấy?

Gọi AH là đường cao của tam giác ABC , ta có
 $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp A'H$ nên góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) là góc $AHA' = 30^\circ$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AA'}{AH} \Rightarrow AA' = AH \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do đó } V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

