

Bài 11. NGUYÊN HÀM

Thời gian thực hiện: 5 tiết

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kỹ năng

- Nhận biết khái niệm nguyên hàm của một hàm số, giải thích một số tính chất của nguyên hàm.
- Tìm nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp thường gặp.
- Vận dụng khái niệm nguyên hàm vào giải quyết một số bài toán từ thực tiễn.

2. Về năng lực

- Rèn luyện các năng lực toán học, đặc biệt là năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán thực tiễn liên quan đến khái niệm nguyên hàm.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

3. Về phẩm chất

Góp phần giúp HS rèn luyện và phát triển các phẩm chất tốt đẹp (yêu nước, nhân ái, chăm chỉ, trung thực, trách nhiệm):

- + Tích cực phát biểu, xây dựng bài và tham gia các hoạt động nhóm;
- + Có ý thức tích cực tìm tòi, sáng tạo trong học tập; phát huy điểm mạnh, khắc phục các điểm yếu của bản thân.

II. THIẾT BỊ DẠY HỌC VÀ HỌC LIỆU

- Giáo viên:

- + Giáo án, bảng phụ, máy chiếu (nếu có), phiếu học tập, ...
- + GV chuẩn bị thông tin về một số mô hình thực tế liên quan đến ứng dụng của nguyên hàm (liên hệ đến khái niệm và phép toán về đạo hàm).

- Học sinh:

- + SGK, vở ghi, dụng cụ học tập.
- + Ôn lại kiến thức và kỹ năng tính đạo hàm của hàm số. Xem lại các khái niệm vận tốc, điện lượng, phương trình chuyển động của vật rơi tự do đã được học trong Vật lí.

III. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC

Bài học này dạy trong 05 tiết:

- + Tiết 1: Mục 1: Định nghĩa nguyên hàm.
- + Tiết 2: Mục 2: Tính chất cơ bản của nguyên hàm.
- + Tiết 3: Mục 3a: Nguyên hàm của hàm số lũy thừa
- + Tiết 4: Mục 3b, c: Nguyên hàm của hàm số lượng giác và hàm số mũ.
- + Tiết 5: Luyện tập.

Tiết 1. ĐỊNH NGHĨA NGUYÊN HÀM

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
HOẠT ĐỘNG KHỞI ĐỘNG		
Mục tiêu: Gợi động cơ, tạo tình huống xuất hiện trong thực tế để HS tiếp cận với khái niệm nguyên hàm. Nội dung: HS đọc tình huống mở đầu, từ đó làm nảy sinh nhu cầu tìm hiểu về nguyên hàm. Sản phẩm: Câu trả lời của HS. Tổ chức thực hiện: HS làm việc cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.		
Tình huống mở đầu (3 phút) - GV tổ chức cho HS đọc bài toán và suy nghĩ bài toán. - <i>Đặt vấn đề:</i> Ta cần tìm $S(t)$ mà máy bay di chuyển được sau t giây kể từ lúc bắt đầu chạy đà. Từ ý nghĩa cơ học của đạo hàm, ta biết rằng $S'(t) = v(t)$. Như vậy, ta cần tìm một hàm số có đạo hàm bằng hàm số $v(t)$ đã cho. Bài toán này dẫn đến một khái niệm qua trọng trong Toán học, đó là khái niệm nguyên hàm.	HS đọc tình huống mở đầu và suy nghĩ về tình huống đó.	Mục đích của phần này chỉ là để HS thấy được tình huống cần sử dụng nguyên hàm để tính toán.
HOẠT ĐỘNG HÌNH THÀNH KIẾN THỨC		
Mục tiêu: Giúp HS hình thành khái niệm nguyên hàm. Nội dung: HS thực hiện HĐ1, Ví dụ 1, từ đó hình thành khái niệm nguyên hàm. Sản phẩm: Lời giải của các câu hỏi trong hoạt động và ví dụ. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.		
1. Nguyên hàm của một hàm số HĐ1 (6 phút) - GV cho HS đọc yêu cầu và thực hiện HĐ1 trong 3 phút và chọn 1 HS đứng tại chỗ trả lời. Sau đó GV cho HS khác nhận xét và chốt lại kết quả. - Sau khi HS thực hiện xong HĐ1, GV sẽ giới thiệu cho HS khái niệm nguyên hàm của hàm số.	HĐ1. a) Ta có $F'(x) = x^2 + 1$. b) Ta có $F'(x) = f(x)$. - HS ghi nội dung cần ghi nhớ.	- Thông qua HĐ1, HS sẽ hình thành được khái niệm nguyên hàm của một hàm số. - Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học, năng lực tư duy và lập luận toán học.

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
Cần lưu ý cho HS nhận biết đẳng thức $F'(x) = f(x)$ trong định nghĩa nguyên hàm. GV viết bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức. GV lưu ý HS nội dung trong mục Chú ý.		
Ví dụ 1 (5 phút) - GV tổ chức cho HS làm việc cá nhân trong 3 phút, sau đó gọi một HS trả lời, các HS khác theo dõi và nhận xét. - HS thực hiện lần lượt tính đạo hàm của các hàm số đã cho, sau đó đối chiếu với định nghĩa nguyên hàm để kết luận và giải thích được kết luận đưa ra. - GV nhận xét và chốt kiến thức.	HS thực hiện Ví dụ 1 và ghi bài vào vở.	- VD1 nhằm rèn cho HS kĩ năng vận dụng định nghĩa nguyên hàm để tìm nguyên hàm của hàm số. - Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học, năng lực tư duy và lập luận toán học.
Luyện tập 1 (5 phút) - GV tổ chức cho HS làm việc cá nhân trong 3 phút, sau đó gọi một HS trả lời, các HS khác theo dõi và nhận xét. - GV nhận xét và chốt kiến thức.	Ta có: $F'(x) = x + \frac{1}{x} = f(x)$, $G'(x) = x - \frac{1}{x} \neq f(x)$ nên $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.	- Mục đích của Luyện tập 1 là củng cố cho HS kĩ năng vận dụng định nghĩa nguyên hàm để tìm nguyên hàm của hàm số.
HD2 (10 phút) - GV cho HS đọc yêu cầu và thực hiện HD2 trong 3 phút và chọn 1 HS đứng tại chỗ trả lời. Sau đó GV cho HS khác nhận xét và chốt lại kết quả. - Sau HD2, GV cho HS thấy tập hợp các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đã cho có dạng $F(x) + C$, với C là hằng số và $F(x)$ là một nguyên hàm nào đó của $f(x)$.	HD2. a) Ta có $F'(x) = x^3 = f(x)$. Vậy $F'(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. b) Ta có $G'(x) = x^3 = f(x)$. Vậy $G'(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. - HS ghi nội dung cần ghi nhớ.	- Thông qua HD2, HS nhận biết được tập hợp các nguyên hàm của một hàm số. - Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học, năng lực tư duy và lập luận toán học.

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
- GV giới thiệu cho HS khái niệm họ nguyên hàm của một hàm số: Định nghĩa và kí hiệu. - GV làm rõ kí hiệu nguyên hàm $\int f(x)dx$ và tập hợp $F(x) + C$, với C là hằng số và $F(x)$ là một nguyên hàm nào đó của $f(x)$.		
Chú ý (3 phút) GV lưu ý cho HS sự tồn tại của nguyên hàm trên một khoảng và cách tìm họ nguyên hàm $\int f(x)dx$.	HS ghi nội dung cần ghi nhớ.	Thông qua phần Chú ý, giới thiệu cho HS sự tồn tại của nguyên hàm và quy tắc thực hành tìm họ nguyên hàm của một hàm số.
Ví dụ 2 (5 phút) GV tổ chức cho HS làm việc cá nhân trong 3 phút, sau đó gọi một HS trả lời, các HS khác theo dõi và nhận xét.	HS thực hiện Ví dụ 2 và ghi bài.	- Thông qua Ví dụ 2, HS thực hành tìm họ nguyên hàm của một hàm số đơn giản. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.
HOẠT ĐỘNG LUYỆN TẬP Mục tiêu: Củng cố kĩ năng tìm họ nguyên hàm của hàm số. Nội dung: HS thực hiện Luyện tập 2. Sản phẩm: Lời giải của HS bài luyện tập. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.		
Luyện tập 2 (5 phút) GV tổ chức cho HS làm việc cá nhân trong 2 phút. GV gọi đại diện HS trình bày kết quả, các bạn khác theo dõi và nhận xét. GV tổng kết, góp ý.	HD. Ta có $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$. - HS thực hiện Luyện tập 2 và ghi bài.	- Thông qua Luyện tập 2, HS củng cố kĩ năng tìm họ nguyên hàm của hàm số. - Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học, năng lực tư duy và lập luận toán học.
TỔNG KẾT VÀ HƯỚNG DẪN CÔNG VIỆC Ở NHÀ GV tổng kết lại nội dung bài học và dặn dò công việc ở nhà cho HS (3 phút)		

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
- GV tổng kết lại các kiến thức trọng tâm của bài học: Khái niệm nguyên hàm của một hàm số và cách tìm họ nguyên hàm bằng khái niệm. - Giao cho HS làm các bài tập sau trong SGK: Sử dụng định nghĩa nguyên hàm của hàm số: Bài 4.1. - Nhắc HS đọc trước bài mới chuẩn bị cho tiết học sau.		

Tiết 2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
HOẠT ĐỘNG HÌNH THÀNH KIẾN THỨC		
Mục tiêu: HS khám phá được các tính chất cơ bản của nguyên hàm. Nội dung: HS thực hiện HĐ3, HĐ4 và các ví dụ. Sản phẩm: Kiến thức về các tính chất cơ bản của nguyên hàm. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân và nhóm, dưới sự hướng dẫn của GV.		
2. Tính chất cơ bản của nguyên hàm HĐ3 (5 phút) - GV cho HS thực hiện theo cặp trong 3 phút sau đó gọi đại diện HS đứng tại chỗ trả lời, các HS khác theo dõi, nhận xét. - Từ HĐ3, GV giới thiệu cho HS tính chất của nguyên hàm. - GV có thể yêu cầu HS giải thích vì trường hợp $k = 0$ thì tính chất không còn đúng.	HD. a) Ta có $kf(x) (kf(x))' = k(F(x))' = kf(x)$ nên $kF(x)$ là một nguyên hàm của . b) Ta có $\int kf(x)dx = kF(x) + C$ $= k \int f(x)dx$ - HS ghi nội dung cần ghi nhớ. - Với $k = 0$ thì $\int kf(x)dx = \int 0dx = C \quad (C' = 0)$ với C là hằng số, $k \int f(x)dx = 0$. Đó đó tính chất không đúng với $k = 0$.	- Thông qua HĐ3, HS khám phá được tính chất cơ bản của nguyên hàm. - Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học.
Ví dụ 3 (5 phút) GV cho HS thực hiện cá nhân Ví dụ 3 trong 3 phút, sau đó gọi 2 HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi, nhận xét. GV tổng kết, nhận xét và chốt đáp án.	HS thực hiện Ví dụ 3 và ghi bài.	- Mục đích của Ví dụ này là rèn luyện cho HS cách tính nguyên hàm bằng cách sử dụng tính chất của nguyên hàm. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
Luyện tập 3 (5 phút) GV cho HS thực hiện cá nhân sau đó gọi 1 HS đứng tại chỗ trả lời, các HS khác theo dõi và nhận xét.	- HS thực hiện Luyện tập 3 và ghi bài. a) Ta có $F'(x) = x^n = f(x)$ nên $\int x^n dx = F(x)$. b) $\int kx^n dx = k \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (k \neq 0)$.	- Mục đích của Ví dụ này là cung cấp cho HS công thức để tính nguyên hàm của hàm lũy thừa. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.
HD4 (6 phút) - GV cho HS thực hiện theo cặp trong 3 phút sau đó gọi đại diện HS đứng tại chỗ trả lời, các HS khác theo dõi, nhận xét. - Từ HD4, GV giới thiệu cho HS tính chất của nguyên hàm.	a) $(F(x) + G(x))' = f(x) + g(x)$ nên $F(x) + G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) + g(x)$. b) Ta có $\int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.	- Thông qua HD4, HS khám phá được tính chất cơ bản của nguyên hàm. - Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học.
Ví dụ 4 (5 phút) GV cho HS thực hiện cá nhân Ví dụ 4 trong 3 phút, sau đó gọi 2 HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi, nhận xét. GV tổng kết, nhận xét và chốt đáp án.	HS thực hiện Ví dụ 4 và ghi bài.	- Mục đích của Ví dụ này là rèn luyện cho HS cách tính nguyên hàm bằng cách sử dụng tính chất của nguyên hàm. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.
HOẠT ĐỘNG LUYỆN TẬP Mục tiêu: Củng cố kỹ năng tìm nguyên hàm bằng cách sử dụng tính chất của nguyên hàm. Nội dung: HS thực hiện các yêu cầu trong Luyện tập 4. Sản phẩm: Lời giải của HS trong bài. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.		
Luyện tập 4 (5 phút) - GV cho HS thực hiện cá nhân trong 3 phút, sau đó gọi đại diện 2 HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi, nhận xét và chốt đáp án.	- HS đọc nội dung và thực hiện Luyện tập 4. HD. a) $\int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C$.	- Luyện tập 4 là hoạt động rèn luyện kỹ năng tính nguyên hàm bằng cách sử dụng tính chất của nguyên hàm.

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
	b) $\int (2x-1)^2 x = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + C.$	- Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.
HOẠT ĐỘNG VẬN DỤNG Mục tiêu: Giúp HS vận dụng được kiến thức về nguyên hàm để giải quyết một số tình huống thực tế. Nội dung: HS thực hiện các yêu cầu trong Vận dụng. Sản phẩm: Lời giải của HS. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động nhóm, dưới sự hướng dẫn của GV.		
Ví dụ 5 (6 phút) GV cho HS thực hiện theo cặp trong 3 phút, sau đó gọi đại diện 1 cặp trả lời, các HS khác theo dõi, nhận xét và chốt đáp án.	HS đọc nội dung và thực hiện Ví dụ 5.	- Ví dụ 5 là hoạt động vận dụng nguyên hàm để giải quyết các bài toán thực tế. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học.
Vận dụng (6 phút) GV chia lớp thành các nhóm theo tổ, cho HS thực hiện nhóm rồi trình bày kết quả ra bảng phụ rồi dán lên bảng, các nhóm theo dõi và nhận xét bài làm của các nhóm còn lại. GV tổng kết rồi chốt đáp án.	- HS hoạt động nhóm thực hiện Vận dụng. - Từ định nghĩa đạo hàm có $R'(x) = M_R(x).$ Cho trước hàm tốc độ biến động của doanh thu $M_R(x)$ khi x đơn vị sản phẩm được bán ra thì $R(x)$ là một nguyên hàm của $M_R(x)$. Do đó $\begin{aligned} R(x) &= \int M_R(x) dx \\ &= \int (300 - 0,1x) dx \\ &= 300x - \frac{0,1x^2}{2} + C. \end{aligned}$ Từ ý nghĩa thực tiễn, $R(0) = 0$ nên $C = 0$. Từ đó tìm được $R(1000) = 200\,000$ (triệu đồng)	- Mục đích phần này là rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học, vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng trong bài học để giải quyết. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học.

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
TỔNG KẾT VÀ HƯỚNG DẪN CÔNG VIỆC Ở NHÀ GV tổng kết lại nội dung bài học và dặn dò công việc ở nhà cho HS (2 phút) - GV tổng kết lại các kiến thức trọng tâm của bài học: Tính chất cơ bản của nguyên hàm. - Giao cho HS làm các bài tập sau trong SGK: Bài 4.2. Tìm nguyên hàm bằng cách sử dụng tính chất của nguyên hàm.		

Tiết 3. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
HOẠT ĐỘNG HÌNH THÀNH KIẾN THỨC Mục tiêu: HS khám phá được các công thức tính nguyên hàm của hàm số lũy thừa. Nội dung: HS thực hiện HĐ3, HĐ4 và các ví dụ. Sản phẩm: Kiến thức về các tính chất cơ bản của nguyên hàm. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân dưới sự hướng dẫn của GV.		
3. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp a) Nguyên hàm của hàm số lũy thừa (14 phút) - GV giới thiệu cho HS hàm số lũy thừa và tập xác định của nó trong từng trường hợp. - HS nhắc lại công thức tính đạo hàm của $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $y = \sqrt{x}$. - Từ công thức đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $y = \sqrt{x}$, GV giới thiệu cho HS công thức đạo hàm của hàm lũy thừa. - GV tổng kết và trình chiếu nội dung trong khung kiến thức. - GV giao nhiệm vụ cho HS thực hiện câu hỏi trong SGK.	- HS nhắc lại công thức tính đạo hàm đã học ở lớp 11. - HS ghi nội dung cần ghi nhớ. - Ta có $y' = \left(\frac{1}{x^4} \right)' = (x^{-4})' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5},$ $y' = (x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1},$ $y' = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}} \right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}.$	- Mục đích của phần này là để HS nhận biết hàm số lũy thừa, công thức tính đạo hàm của hàm số lũy thừa. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.
HĐ5 (6 phút) - GV cho HS thực hiện theo cặp HĐ5 trong 3 phút, sau đó gọi 1 HS	a) $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)' = x^\alpha;$	- Mục đích của HĐ5 là giúp HS nhận biết công

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
trình bày, các HS khác theo dõi, nhận xét. GV tổng kết, nhận xét và chốt đáp án. - Từ kết quả của HĐ5, HS rút ra công thức tính nguyên hàm của hàm số $y = x^a, y = \frac{1}{x}$. - GV tổng kết và trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.	b) Với $x > 0$, ta có $(\ln x)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$ Với $x < 0$, ta có $(\ln x)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{x}.$	thức tính nguyên hàm của hàm số lũy thừa. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.
Ví dụ 6 (10 phút) GV cho HS thực hiện cá nhân sau đó gọi 3 HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi và nhận xét.	HS thực hiện Ví dụ 6 và ghi bài.	- Mục đích của Ví dụ này là để HS rèn luyện kỹ năng tính nguyên hàm của hàm số lũy thừa. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.
HOẠT ĐỘNG LUYỆN TẬP Mục tiêu: Củng cố kỹ năng tìm nguyên hàm của hàm số lũy thừa. Nội dung: HS thực hiện các yêu cầu trong Luyện tập 5. Sản phẩm: Lời giải của HS trong bài. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.		
Luyện tập 5 (10 phút) GV cho HS thực hiện cá nhân trong 5 phút, sau đó gọi đại diện 3 HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi, nhận xét và chốt đáp án.	- HS đọc nội dung và thực hiện Luyện tập 5. a) $\int \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{-3x^3} + C.$ b) $\int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C.$ c) $\int \left(\frac{3}{x} - 5\sqrt[3]{x} \right) dx = 3\ln x - \frac{15}{4} x\sqrt[3]{x} + C.$	- Luyện tập 4 là hoạt động rèn luyện kỹ năng tính nguyên hàm bằng cách sử dụng tính chất của nguyên hàm. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.
TỔNG KẾT VÀ HƯỚNG DẪN CÔNG VIỆC Ở NHÀ GV tổng kết lại nội dung bài học và dặn dò công việc ở nhà cho HS (5 phút) - GV tổng kết lại các kiến thức trọng tâm của bài học: Nguyên hàm của hàm số lũy thừa. - Giao cho HS làm các bài tập sau trong SGK: + Bài 4.3 ý a, b, c, bài 4.5: Tính nguyên hàm của hàm số lũy thừa.		

Tiết 4. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ HÀM SỐ MŨ

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt																				
HOẠT ĐỘNG HÌNH THÀNH KIẾN THỨC																						
Mục tiêu: HS khám phá được công thức tính nguyên hàm của hàm số lượng giác và hàm số mũ.																						
Nội dung: HS thực hiện HĐ6, HĐ7 và các ví dụ.																						
Sản phẩm: Công thức tính nguyên hàm của hàm số lượng giác và hàm số mũ.																						
Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân dưới sự hướng dẫn của GV.																						
3. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp b) Nguyên hàm của hàm số lượng giác HĐ6 (10 phút) - GV cho HS thực hiện theo cặp trong 3 phút sau đó gọi đại diện HS đứng tại chỗ trả lời, các HS khác theo dõi, nhận xét. - Từ HĐ6, HS rút ra công thức tính nguyên hàm của các hàm số lượng giác - GV trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.	HD. a) <table border="1"><tr><td>$F(x)$</td><td>$\sin x$</td><td>$\cos x$</td><td>$\tan x$</td><td>$\cot x$</td></tr><tr><td>$F'(x)$</td><td>$\cos x$</td><td>$-\sin x$</td><td>$\frac{1}{\cos^2 x}$</td><td>$-\frac{1}{\sin^2 x}$</td></tr></table> b) <table border="1"><tr><td>$f(x)$</td><td>$\cos x$</td><td>$\sin x$</td><td>$\frac{1}{\cos^2 x}$</td><td>$\frac{1}{\sin^2 x}$</td></tr><tr><td>$\int f(x)dx$</td><td>$\sin x$</td><td>$-\cos x$</td><td>$\tan x$</td><td>$-\cot x$</td></tr></table> - HS ghi nội dung cần ghi nhớ.	$F(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$F'(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$f(x)$	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int f(x)dx$	$\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$-\cot x$	- Thông qua HĐ3, HS khám phá được các công thức tính nguyên hàm của hàm số lượng giác. - Góp phần phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học.
$F(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$																		
$F'(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$																		
$f(x)$	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$																		
$\int f(x)dx$	$\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$-\cot x$																		
Ví dụ 7 (5 phút) GV cho HS thực hiện cá nhân Ví dụ 3 trong 4 phút, sau đó gọi 2 HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi, nhận xét. GV tổng kết, nhận xét và chốt đáp án.	HS thực hiện Ví dụ 7 và ghi bài.	- Mục đích của Ví dụ này là hình thành cách tính nguyên hàm của hàm số lượng giác. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.																				
Luyện tập 6 (5 phút) GV cho HS thực hiện cá nhân sau đó gọi 2 HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi và nhận xét.	- HS thực hiện Luyện tập 6 và ghi bài. a) $\int (3\cos x - 4\sin x)dx$ $= 3\sin x + 4\cos x + C;$ b) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$ $= \tan x + \cot x + C.$	- Mục đích của Luyện tập 6 là rèn luyện kỹ năng tính nguyên hàm của hàm số lượng giác. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.																				

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt												
c) Nguyên hàm của hàm số mũ HD7 (10 phút) - GV cho HS thực hiện theo cặp trong 3 phút sau đó gọi đại diện HS đứng tại chỗ trả lời, các HS khác theo dõi, nhận xét. - Từ HD7, HS rút ra công thức tính nguyên hàm của các hàm số lượng giác. - GV trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.	a) <table border="1"> <tr> <td>$F(x)$</td><td>e^x</td><td>$\frac{a^x}{\ln a} (0 < a \neq 1)$</td></tr> <tr> <td>$F'(x)$</td><td>$e^x$</td><td>$a^x$</td></tr> </table> b) <table border="1"> <tr> <td>$f(x)$</td><td>e^x</td><td>$a^x (0 < a \neq 1)$</td></tr> <tr> <td>$\int f(x)dx$</td><td>e^x</td><td>$\frac{a^x}{\ln a}$</td></tr> </table> - HS ghi nội dung cần ghi nhớ.	$F(x)$	e^x	$\frac{a^x}{\ln a} (0 < a \neq 1)$	$F'(x)$	e^x	a^x	$f(x)$	e^x	$a^x (0 < a \neq 1)$	$\int f(x)dx$	e^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	- Thông qua HD7, HS nhận biết được các công thức tính nguyên hàm của hàm số mũ. - Góp phần phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học.
$F(x)$	e^x	$\frac{a^x}{\ln a} (0 < a \neq 1)$												
$F'(x)$	e^x	a^x												
$f(x)$	e^x	$a^x (0 < a \neq 1)$												
$\int f(x)dx$	e^x	$\frac{a^x}{\ln a}$												
Ví dụ 8 (5 phút) GV cho HS thực hiện cá nhân Ví dụ 8 trong 4 phút, sau đó gọi 3 HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi, nhận xét. GV tổng kết, nhận xét và chốt đáp án.	HS thực hiện Ví dụ 8 và ghi bài.	- Mục đích của Ví dụ này là rèn luyện kỹ năng tính nguyên hàm của hàm số mũ. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.												
HOẠT ĐỘNG LUYỆN TẬP Mục tiêu: Củng cố kỹ năng tìm nguyên hàm của hàm số mũ. Nội dung: HS thực hiện các yêu cầu trong Luyện tập 7. Sản phẩm: Lời giải của HS trong bài. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân và nhóm, dưới sự hướng dẫn của GV.														
Luyện tập 7 (5 phút) - GV cho HS thực hiện cá nhân trong 5 phút, sau đó gọi đại diện 3 HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi, nhận xét và chốt đáp án.	- HS đọc nội dung và thực hiện Luyện tập 7. HD. a) $\int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C.$ b) $\int \frac{1}{e^x} dx = -\frac{1}{e^x} + C.$ c) $\int \left(2 \cdot 3^x - \frac{1}{3} \cdot 7^x \right) dx$	- Mục đích của Luyện tập 7 là củng cố kỹ năng tính nguyên hàm của hàm số mũ. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.												

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
	$= \frac{2 \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{7^x}{3 \ln 7} + C.$	
Bảng nguyên hàm (3 phút) GV cho HS thực hiện theo cặp, tổng kết thành bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp.	HS tổng kết lại thành bảng nguyên hàm của các hàm số thường gặp.	- HS tổng kết lại được bảng công thức nguyên hàm của các hàm số thường gặp. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.
TỔNG KẾT VÀ HƯỚNG DẪN CÔNG VIỆC Ở NHÀ GV tổng kết lại nội dung bài học và dặn dò công việc ở nhà cho HS (2 phút) - GV tổng kết lại các kiến thức trọng tâm của bài học: Nguyên hàm của hàm số lượng giác và hàm số mũ. - Giao cho HS làm các bài tập sau trong SGK: + Bài 4.3, 4.4: Tính nguyên hàm của các hàm số thường gặp. + Bài 4.7: Ứng dụng thực tế của nguyên hàm.		

Tiết 5: LUYỆN TẬP

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
HOẠT ĐỘNG KHỞI ĐỘNG Mục tiêu: Nhớ lại khái niệm nguyên hàm, tính chất của nguyên hàm và các công thức tính nguyên hàm của một số hàm số thường gặp. Nội dung: HS ôn tập lại các công thức thông qua phiếu học tập số 1. Sản phẩm: Câu trả lời của HS. Tổ chức thực hiện: Hoạt động cá nhân dưới sự hướng dẫn của GV.		
Hoạt động khởi động (6 phút) - GV phát phiếu học tập số 1 cho HS hoàn thiện theo nhóm. Sau đó gọi đại diện HS trả lời, các bạn khác theo dõi và nhận xét. GV chốt đáp án. - GV có thể tổ chức cho HS hoàn thiện phiếu học tập số 1 thông qua trò chơi trình chiếu trên máy chiếu.	HS thực hiện phiếu học tập số 1. HD. 1. C 2. C 3. D 4. A 5. C.	- Mục đích của hoạt động này là để HS nhớ lại các công thức nguyên hàm của các hàm số. - Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học.

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
HOẠT ĐỘNG LUYỆN TẬP Mục tiêu: Củng cố cho HS cách tìm nguyên hàm của các hàm số. Nội dung: HS thực hiện các bài tập cuối bài trong SGK. Sản phẩm: Lời giải của các bài tập cuối bài. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.		
Bài tập 4.2 ý b và d (8 phút) GV cho HS hoạt động cá nhân trong 5 phút, sau đó gọi 2 HS lên bảng làm bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.	HS làm Bài tập 4.2 và ghi bài.	- Mục đích của bài tập này là rèn luyện cho HS cách tìm nguyên hàm lũy thừa. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học.
Bài tập 4.3 ý c, d (9 phút) GV cho HS hoạt động cá nhân trong 5 phút, sau đó gọi HS lên bảng làm bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.	HS làm Bài tập 4.3 và ghi bài.	- Mục đích của bài tập này là rèn luyện cho HS cách tìm nguyên hàm của hàm số lũy thừa và hàm số mũ. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học.
Bài tập 4.4 ý a, b (8 phút) GV cho HS hoạt động cá nhân trong 5 phút, sau đó gọi HS lên bảng làm bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.	HS làm Bài tập 4.4 và ghi bài.	- Mục đích của bài tập này là rèn luyện cho HS cách tìm nguyên hàm của hàm số lượng giác. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học.
HOẠT ĐỘNG VẬN DỤNG Mục tiêu: HS thấy được ý nghĩa của nguyên hàm trong thực tế. Nội dung: HS thực hiện các bài tập cuối bài trong SGK. Sản phẩm: Lời giải của bài tập cuối bài.		

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.		
Bài tập 4.7 (10 phút) GV cho HS hoạt động cá nhân trong 6 phút, sau đó gọi HS lên bảng làm bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết. + Tuỳ tình hình lớp học, GV có thể lựa chọn thêm một số bài tập trong SBT hoặc bài tập nâng cao để giao cho những HS đã hoàn thành bài tập trong SGK hoặc HS khá giỏi (Dạy học phân hoá trong tiết chữa bài tập).	HS làm Bài tập 4.7 và ghi bài.	- Mục đích của bài tập này là để HS ứng dụng nguyên hàm để giải quyết tình huống thực tế. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học.
TỔNG KẾT VÀ HƯỚNG DẪN CÔNG VIỆC Ở NHÀ GV tổng kết lại nội dung bài học và dặn dò công việc ở nhà cho HS (4 phút) - GV tổng kết lại các kiến thức trọng tâm của bài học. - Nhắc HS ôn tập các nội dung đã học: Các công thức tính nguyên hàm của các hàm số thường gặp. - Giao cho HS làm bài tập trong SBT. - Nhắc HS đọc trước bài mới chuẩn bị cho tiết học sau.		

PHỤ LỤC. PHIẾU HỌC TẬP SỐ 1

- Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu
 - $F'(x) = -f(x), \forall x \in K.$
 - $f'(x) = F(x), \forall x \in K.$
 - $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$
 - $f'(x) = -F(x), \forall x \in K.$
- Mệnh đề nào dưới đây **sai**?
 - $\int f'(x) dx = f(x) + C$ với mọi hàm $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}.$
 - $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ với mọi hàm $f(x), g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}.$
 - $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}.$
 - $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$ với mọi hàm $f(x), g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}.$
- Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ là hàm số liên tục, có $F(x), G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x), g(x)$. Xét các mệnh đề sau:
 - $F(x) + G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) + g(x).$
 - $k \cdot F(x)$ là một nguyên hàm của $k \cdot f(x)$ với $k \in \mathbb{R}.$

(iii) $F(x) \cdot G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) \cdot g(x)$.

Các mệnh đề đúng là

A. (ii) và (iii). B. Cả 3 mệnh đề. C. (i) và (iii). D. (i) và (ii).

4. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\int kf(x)dx = \int f(x)dx$ với $k \in \mathbb{R}$.

B. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ với $f(x); g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ với $\alpha \neq -1$.

D. $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$.

5. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Chọn mệnh đề **sai**.

A. $\int f(x)dx = F(x) + C$. B. $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$.

C. $\left(\int f(x)dx \right)' = f'(x)$. D. $\left(\int f(x)dx \right)' = F'(x)$.

6. Hoàn thành bảng các công thức tính nguyên hàm sau:

$\int 0dx = \dots$	$\int 1dx = \dots$
$\int x^n dx = \dots$	$\int \frac{1}{x} dx = \dots$
$\int e^x dx = \dots$	$\int a^x dx = \dots$
$\int \cos x dx = \dots$	$\int \sin x dx = \dots$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \dots$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \dots$

BÀI TẬP CUỐI BÀI TRONG SGK VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

4.1. a) $F'(x) = \ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1 = f(x)$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ nên hàm số $F(x) = x \ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \ln x$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

b) $F(x) = e^{\sin x}$ không là nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\cos x}$ trên $\mathbb{R}$.

4.2. a) Dùng định nghĩa hoặc tính chất nguyên hàm của một tổng, hiệu.

Đáp số. $\int (3x^2 + 2x - 1)dx = x^3 + x^2 - x + C$.

b) *Đáp số.* $\int (x^3 - x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C.$

c) Ta có $\left((2x+1)^3\right)' = 3(2x+1)^2(2x+1)' = 6(2x+1)^2$. Do đó $\frac{(2x+1)^3}{6}$ là một nguyên hàm của hàm số $(2x+1)^2$ trên $\mathbb{R}$. Vậy $\int (2x+1)^2 dx = \frac{(2x+1)^3}{6} + C.$

GV có thể hướng dẫn HS khai triển hằng đẳng thức và dùng tính chất của nguyên hàm kết hợp với bảng nguyên hàm.

d) Ta có $f(x) = \left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4x^2 - 4 + \frac{1}{x^2}$ nên

$$\int \left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int 4x^2 dx - \int 4 dx + \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{4x^3}{3} - 4x - \frac{1}{x} + C.$$

4.3. Dùng các tính chất của nguyên hàm.

a) Ta có:

$$\int \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx = \int 3\sqrt{x} dx + \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{3}} dx = 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C.$$

Đáp số. $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx = 2x\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C.$

b) Phân tích tương tự, ta có $\int \sqrt{x}(7x^2 - 3) dx = \int 7x^{\frac{5}{2}} dx - \int 3x^{\frac{1}{2}} dx = 7 \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C.$

Đáp số. $\int \sqrt{x}(7x^2 - 3) dx = 2(x^3 - x)\sqrt{x} + C.$

c) Khai triển $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$ và chia cho x^2 . Dùng tính chất của nguyên hàm.

Đáp số. $\int \frac{(2x+1)^2}{x^2} dx = 4x + 4 \ln|x| - \frac{1}{x} + C.$

d) *Đáp số.* $\int \left(2^x + \frac{3}{x^2}\right) dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{3}{x} + C.$

4.4. Biến đổi biểu thức lượng giác và dùng tính chất của nguyên hàm.

a) *Đáp số.* $\int \left(2 \cos x - \frac{3}{\sin^2 x}\right) dx = 2 \sin x + 3 \cot x + C.$

b) Biến đổi $4 \sin^2 \frac{x}{2} = 4 \cdot \frac{1 - \cos x}{2} = 2(1 - \cos x).$

Đáp số. $\int 4 \sin^2 \frac{x}{2} dx = 2(x - \sin x) + C.$

c) Biến đổi $\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin x.$

Đáp số. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = x + \cos x + C.$

d) Sử dụng công thức biến đổi $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ta được

$$\int (x + \tan^2 x) dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int x dx - \int dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

Đáp số. $\int (x + \tan^2 x) dx = \frac{x^2}{2} - x + \tan x + C.$

4.5. Hàm số $f(x)$ cần tìm là một nguyên hàm của hàm số $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$. Ta có:

$$\int \left(2x + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int 2x dx + \int \frac{1}{x^2} dx = x^2 - \frac{1}{x} + C.$$

Do đó, hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + C, x \in (0; +\infty)$. Khi đó, $f(1) = 1^2 - 1 + C = C$.

Vậy $C = 1$ và $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1, x \in (0; +\infty)$. Đáp số. $f(4) = \frac{67}{4}$.

4.6. Từ ý nghĩa hình học của đạo hàm, ta đã biết hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x; f(x)) \in (C)$ là $k_M = f'(x)$. Do đó, hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2$. Lập luận tương

tự Bài tập 4.5 và chú ý rằng $f(0) = 0$ ta được $f(x) = \frac{(x-1)^3 + 1}{3}$ là hàm số cần tìm.

4.7. Từ ý nghĩa cơ học của đạo hàm, ta đã biết độ cao $h(t)$ của viên đạn (tính từ mặt đất) tại thời điểm t thỏa mãn $h'(t) = v(t)$ nên $h(t)$ là nguyên hàm của hàm vận tốc $v(t)$. Ta có:

$$\int v(t) dt = \int (160 - 9,8t) dt = 160t - 4,9t^2 + C.$$

Do đó, độ cao $h(t)$ có dạng $h(t) = 160t - 4,9t^2 + C$. Kết hợp với giả thiết $h(0) = 0$ ta được $C = 0$ và $h(t) = 160t - 4,9t^2$ (m).

a) Sau thời gian $t = 5$ (giây), độ cao của viên đạn là $h = h(5) = 160 \cdot 5 - 4,9 \cdot 5^2 = 677,5$ (m).

b) Khi viên đạn đạt độ cao lớn nhất thì $v(t) = 160 - 9,8t = 0$. Từ đó ta có $t = t_m \approx 16,3$ (giây).

Độ cao lớn nhất của viên đạn là $h_{\max} = h(t_m) \approx 160 \cdot 16,3 - 4,9 \cdot 16,3^2 \approx 1360,1$ (m).