

Bài 16. CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Thời gian thực hiện: 2 tiết (Tiết 84, 85)

I. MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kỹ năng

- Tính góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng.
- Vận dụng được kiến thức về góc vào một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

2. Về năng lực

- Rèn luyện năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán có tính góc giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng trong thực tiễn.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

3. Về phẩm chất

Góp phần giúp HS rèn luyện và phát triển các phẩm chất tốt đẹp (yêu nước, nhân ái, chăm chỉ, trung thực, trách nhiệm):

- + Tích cực phát biểu, xây dựng bài và tham gia các hoạt động nhóm;
- + Có ý thức tích cực tìm tòi, sáng tạo trong học tập; phát huy điểm mạnh, khắc phục các điểm yếu của bản thân.

II. THIẾT BỊ DẠY HỌC VÀ HỌC LIỆU

- Giáo viên:

- + Giáo án, bảng phụ, máy chiếu (nếu có),...
- + GV chuẩn bị thông tin về một số mô hình thực tế có tính góc giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng trong thực tiễn.

- Học sinh:

- + SGK, vở ghi, dụng cụ học tập.

III. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC

Bài học này dạy trong 02 tiết:

- + Tiết 1: Mục 1 và Mục 2. Công thức tính góc giữa hai đường thẳng và Công thức tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.
- + Tiết 2: Mục 3 và chữa một số bài tập.

Tiết 1. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
HOẠT ĐỘNG KHỞI ĐỘNG		
Mục tiêu: Gợi động cơ, tạo tình huống xuất hiện trong thực tế để HS thấy được tình huống cần tính góc trong thực tế. Nội dung: HS đọc tình huống mở đầu, từ đó làm nảy sinh nhu cầu tìm hiểu về công thức tính góc. Sản phẩm: Câu trả lời của HS. Tổ chức hoạt động: HS làm việc cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.		
Tình huống mở đầu (3 phút) - GV tổ chức cho học sinh đọc bài toán và suy nghĩ bài toán. - <i>Đặt vấn đề:</i> GV có thể gợi vấn đề như sau: Việc tính được mái nhà nghiêng với mặt sàn nhà một góc bao nhiêu chính là việc chúng ta đi tính góc giữa hai mặt phẳng. Vậy làm thế nào để tính được góc giữa hai mặt phẳng, ta sẽ đi tìm hiểu bài này.	HS đọc và suy nghĩ về tình huống.	- Mục đích của phần này chỉ là để HS thấy được tình huống cần tính góc trong thực tế. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.
HOẠT ĐỘNG HÌNH THÀNH KIẾN THỨC		
Mục tiêu: Giúp HS hình thành được công thức tính góc giữa hai đường thẳng, tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Nội dung: HS thực hiện HĐ1, HĐ2 và các ví dụ, từ đó hình thành công thức tính góc giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng. Sản phẩm: Lời giải của các câu hỏi trong hoạt động và ví dụ. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.		
1. Công thức tính góc giữa hai đường thẳng HĐ1 (6 phút) - GV cho HS đọc yêu cầu và thực hiện HĐ1 trong 3 phút và chọn 1 HS đứng tại chỗ trả lời. Sau đó GV cho HS khác nhận xét và chốt lại kết quả như sau: “Vậy để tính cosin của góc giữa hai đường thẳng, ta đưa về tính cosin của góc giữa hai vectơ”.	HS thực hiện cá nhân HĐ1. <i>HD.</i> a) Nếu $0 \leq (\vec{u}; \vec{u}') \leq 90^\circ$ thì $(\Delta; \Delta') = (\vec{u}; \vec{u}').$ Nếu $90^\circ < (\vec{u}; \vec{u}') \leq 180^\circ$ thì $(\Delta; \Delta') = 180^\circ - (\vec{u}; \vec{u}').$	- Thông qua HĐ1, HS sẽ tìm hiểu được mối quan hệ của góc giữa hai đường thẳng và góc giữa hai vectơ chỉ phương. - Góp phần phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học.

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
- GV cho HS nhắc lại công thức tính cosin của góc giữa 2 vectơ. GV viết bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức.	b) Ta có $\cos(\Delta; \Delta') = \left \cos(\vec{u}; \vec{u}') \right .$ - HS nhắc lại công thức tính cosin của góc giữa hai vectơ. - HS ghi nội dung cần ghi nhớ.	
Ví dụ 1 (5 phút) - GV tổ chức cho HS làm việc cá nhân trong 3 phút, sau đó gọi HS trả lời, các HS khác theo dõi và nhận xét. GV nhận xét và chốt kiến thức.	HS thực hiện Ví dụ 1 và ghi bài.	- Mục đích của hoạt động này là hình thành cho HS kĩ năng tính góc giữa hai đường thẳng. - Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học.
Luyện tập 1 (5 phút) - GV tổ chức cho HS làm việc cá nhân trong 3 phút, sau đó gọi một HS trả lời, các HS khác theo dõi và nhận xét. GV nhận xét và chốt kiến thức.	- HS thực hiện Luyện tập 1 và ghi bài. HD. Đường thẳng Δ có một là $\vec{u} = (1; 2; -2)$, trục Oz có một vector chỉ phương là $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Ta có: $\cos(\Delta, Oz) = \left \cos(\vec{u}, \vec{i}) \right $ $= \frac{ \vec{u} \cdot \vec{i} }{ \vec{u} \cdot \vec{i} } = \frac{2}{3}.$ Do đó $(\Delta, Oz) \approx 48,2^\circ$.	- Mục đích của hoạt động này là luyện tập cho HS kĩ năng tính góc giữa hai đường thẳng. - Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học.
2. Công thức tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng HD2 (6 phút) - GV cho HS đọc yêu cầu và thực hiện HD2 trong 3 phút và chọn 1 HS đứng tại chỗ trả lời. Sau đó GV cho HS khác nhận xét và chốt lại kết quả như sau: “Vậy để tính sin của góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, ta đưa về tính cosin của góc giữa vector chỉ phương của đường thẳng và vector pháp tuyến của mặt phẳng đó”.	- HS thực hiện cá nhân HD2. HD. a) Ta có $(\Delta; (P)) + (\Delta; \Delta') = 90^\circ.$ b) Ta có $\sin(\Delta; (P)) = \cos(\Delta; \Delta')$ $= \left \cos(\vec{u}; \vec{n}) \right .$ - HS ghi nội dung cần ghi nhớ.	- Thông qua HD2, HS tìm được mối quan hệ của góc giữa đường thẳng và mặt phẳng với góc giữa vector chỉ phương và vector pháp tuyến tương ứng. - Góp phần phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học.

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
- GV viết bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức.		
Ví dụ 2 (5 phút) GV tổ chức cho HS làm việc cá nhân trong 3 phút, sau đó gọi một HS trả lời, các HS khác theo dõi và nhận xét.	HS thực hiện Ví dụ 2 và ghi bài.	- Thông qua Ví dụ 2, HS tính được góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.
HOẠT ĐỘNG LUYỆN TẬP Mục tiêu: Rèn luyện kỹ năng tính góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Nội dung: HS thực hiện Luyện tập 2. Sản phẩm: Lời giải của HS bài luyện tập. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.		
Luyện tập 2 (5 phút) GV tổ chức cho HS làm việc theo cá nhân trong 3 phút. GV gọi đại diện HS trình bày kết quả, các bạn khác theo dõi và nhận xét. GV tổng kết, góp ý.	- HS thực hiện Luyện tập 2 và ghi bài. HD. Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; 2; 1)$, mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1; 1)$. Ta có: $\sin(\Delta, (P)) = \cos(\vec{u}, \vec{n}) $ $= \frac{ -1 - 2 + 1 }{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ $\Rightarrow (\Delta, (P)) \approx 28,1^\circ.$	- Rèn luyện cho HS kỹ năng tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.
Bài tập 5.20 (6 phút) GV tổ chức cho HS làm việc theo cá nhân trong 3 phút. GV gọi đại diện HS trình bày kết quả, các bạn khác theo dõi và nhận xét. GV tổng kết, góp ý.	HS làm Bài tập 5.20 và ghi bài.	- Rèn luyện cho HS kỹ năng tính góc giữa hai đường thẳng. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.
TỔNG KẾT VÀ HƯỚNG DẪN CÔNG VIỆC Ở NHÀ GV tổng kết lại nội dung bài học và dặn dò công việc ở nhà cho HS (4 phút)		

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
- GV tổng kết lại các kiến thức trọng tâm của bài học: Công thức tính góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. - Giao cho HS làm các bài tập sau trong SGK: Bài tập 5.21, 5.22: Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. - Nhắc HS đọc trước bài mới chuẩn bị cho tiết học sau.		

Tiết 2. CÔNG THỨC TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
HOẠT ĐỘNG HÌNH THÀNH KIẾN THỨC		
Mục tiêu: HS hình thành được công thức tính góc giữa hai mặt phẳng. Nội dung: HS thực hiện HĐ3 và các ví dụ. Sản phẩm: Công thức tính góc giữa hai mặt phẳng trong không gian. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân, theo nhóm dưới sự hướng dẫn của GV.		
3. Công thức tính góc giữa hai mặt phẳng Nhắc lại kiến thức (2 phút) - GV cho HS nhắc lại công thức tính góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. HĐ3 (5 phút) - GV cho HS thực hiện theo cặp trong 3 phút sau đó gọi đại diện HS đứng tại chỗ trả lời, các HS khác theo dõi, nhận xét. - Sau khi thực hiện HĐ3, GV giới thiệu cho HS công thức (1) công thức để tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng, từ đó suy ra góc giữa hai mặt phẳng. - GV viết bảng hoặc trình chiếu nội dung trong Khung kiến thức.	- HS nhắc lại công thức tính góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. - HS thảo luận thực hiện HĐ3. <i>HD.</i> a) $((P);(Q)) = (\Delta; \Delta')$. b) $\cos((P);(Q)) = \left \cos(\vec{n}, \vec{n}') \right $ $= \frac{ AA' + BB' + CC' }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \quad (1)$ - HS ghi nội dung cần ghi nhớ.	- Thông qua HĐ3, HS khám phá được công thức tính góc giữa hai mặt phẳng. - Góp phần phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học.
Ví dụ 3 (5 phút) GV cho HS thực hiện cá nhân Ví dụ 3 trong 3 phút, sau đó gọi 1 HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi, nhận xét. GV tổng kết, nhận xét và chốt đáp án.	HS thực hiện Ví dụ 3 và ghi bài.	- Mục đích của hoạt động này là hình thành cho HS cách tính góc giữa hai mặt phẳng.

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
		- Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học.
Luyện tập 3 (5 phút) GV cho HS thực hiện cá nhân sau đó gọi 1 HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi và nhận xét.	- HS thực hiện Luyện tập 3 và ghi bài. <i>HD.</i> Mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -\sqrt{2}; 1)$, mặt phẳng (Oxz) có một vector pháp tuyến là $\vec{j} = (0; 1; 0)$. Ta có: $\cos((P), (Oxz)) = \frac{ -\sqrt{2} }{\sqrt{1+2+1} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow ((P), (Oxz)) = 45^\circ.$	- Mục đích của hoạt động này là hình thành cho HS cách tính góc giữa hai mặt phẳng. - Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học.
HOẠT ĐỘNG LUYỆN TẬP Mục tiêu: Rèn luyện cho HS kỹ năng tính góc giữa hai mặt phẳng. Nội dung: HS thực hiện Ví dụ 4. Sản phẩm: Lời giải của HS trong bài. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.		
Ví dụ 4 (6 phút) GV cho HS thực hiện cá nhân trong 4 phút sau đó gọi đại diện HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi, nhận xét.	HS thực hiện Ví dụ 4 và ghi bài.	- Mục đích của hoạt động này là rèn luyện cho HS cách tính góc giữa hai mặt phẳng. - Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học.
Bài tập 5.22 (4 phút) GV cho HS thực hiện cá nhân trong 3 phút sau đó gọi đại diện HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi, nhận xét.	HS làm Bài tập 5.22 và ghi bài.	- Mục đích của hoạt động này là luyện tập cách tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. - Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học.
HOẠT ĐỘNG VẬN DỤNG Mục tiêu: HS tính được góc giữa hai mặt phẳng trong tình huống thực tế. Nội dung: HS thực hiện các yêu cầu trong Vận dụng và Bài tập 5.23.		

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
Sản phẩm: Lời giải của HS trong bài. Tổ chức thực hiện: HS hoạt động nhóm, dưới sự hướng dẫn của GV.		
Vận dụng (8 phút) - GV cho HS thực hiện theo cặp trong 5 phút, sau đó gọi đại diện HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi, nhận xét và chốt đáp án.	- HS thảo luận và thực hiện Vận dụng 1. <i>HD.</i> Giả sử $AA' = 7m, BB' = 6m, CC' = 5m$, tam giác ABC đều cạnh bằng $4m$ nên $OB = 2\sqrt{3}m$. Đơn vị trên các trục tọa độ là mét, nên ta có: $A'(0; -2; 7), B'(2\sqrt{3}; 0; 6), C'(0; 2; 5)$ $\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (2\sqrt{3}; 2; -1),$ $\overrightarrow{A'C'} = (0; 4; -2).$ Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'C')$ là $\vec{n} = [\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}] = 4\sqrt{3}(0; 1; 2).$ Mặt phẳng tọa độ (Oxy) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Khi đó $\cos((Oxy), (A'B'C')) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\Rightarrow ((Oxy), (A'B'C')) \approx 26,6^\circ.$ Vậy góc giữa mái nhà và mặt sàn gần bằng $26,6^\circ$.	- Mục đích của hoạt động này là HS tính được góc giữa hai mặt phẳng trong tình huống thực tế. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học.
Bài tập 5.23 (8 phút) GV chia lớp thành 4 nhóm, các nhóm thảo luận nhóm và trình bày lời giải ra bảng phụ, sau đó đại diện các nhóm lên bảng trình bày, các nhóm khác theo dõi và nhận xét. GV nhận xét và chốt đáp án.	- HS thảo luận nhóm và làm Bài tập 5.23.	- Mục đích của hoạt động này là HS tính được góc giữa hai mặt phẳng trong tình huống thực tế. - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học.

Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh	Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động	Mục tiêu cần đạt
TỔNG KẾT VÀ HƯỚNG DẪN CÔNG VIỆC Ở NHÀ <i>GV tổng kết lại nội dung bài học và dặn dò công việc ở nhà cho HS (2 phút)</i> - GV tổng kết lại các kiến thức trọng tâm của bài học: Góc giữa hai mặt phẳng. - Giao cho HS làm các bài tập sau trong SGK: Bài tập 5.24: Tính góc giữa hai mặt phẳng. - Nhắc HS đọc và chuẩn bị cho nội dung bài tiếp theo.		

BÀI TẬP CUỐI BÀI TRONG SGK VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

5.20. Đường thẳng Δ_1 có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; 3)$, đường thẳng Δ_2 có một vector chỉ

phương là $\vec{v} = (-1; 1; 2)$. Ta có $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{3\sqrt{21}}{42} \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) \approx 70,9^\circ$.

5.21. Đường thẳng Oz có một vector chỉ phương là $\vec{k} = (0; 0; 1)$, mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến

là $\vec{n} = (1; 2; -1)$. Ta có $\sin(Oz, (P)) = |\cos(\vec{k}, \vec{n})| = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow (Oz, (P)) \approx 24,1^\circ$.

5.22. Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (-1; 2; 3)$, mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến

là $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Ta có $\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{2\sqrt{42}}{21} \Rightarrow (\Delta, (P)) \approx 38,1^\circ$.

5.23. Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho O là giao điểm của AC và BD , điểm A thuộc tia Ox , điểm B thuộc tia Oy , điểm S thuộc tia Oz .

Ta có $OA = OB = OC = 115\sqrt{2}$, $OS = 7\sqrt{439}$

$\Rightarrow A(115\sqrt{2}; 0; 0)$, $B(0; 115\sqrt{2}; 0)$, $C(-115\sqrt{2}; 0; 0)$, $S(0; 0; 7\sqrt{439})$

$\Rightarrow \vec{SA} = (115\sqrt{2}; 0; -7\sqrt{439})$, $\vec{SB} = (0; 115\sqrt{2}; -7\sqrt{439})$, $\vec{SC} = (-115\sqrt{2}; 0; -7\sqrt{439})$.

Từ các vector trên ta tính được:

- Một vector pháp tuyến của (SAB) là $\vec{n}_1 = 115\sqrt{2}(7\sqrt{439}; 7\sqrt{439}; 115\sqrt{2})$,

- Một vector pháp tuyến của (SBC) là $\vec{n}_2 = -115\sqrt{2}(7\sqrt{439}; -7\sqrt{439}; -115\sqrt{2})$.

Do đó $\cos((SAB), (SBC)) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{26450}{69472} \Rightarrow ((SAB), (SBC)) \approx 67,6^\circ$.

5.24. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho mặt phẳng (Oxy) chứa đáy bể, O là chân đường vuông góc kẻ từ B xuống đáy bể, tia Ox chứa chân đường vuông góc kẻ từ A xuống đáy bể, tia Oy chứa chân đường vuông góc kẻ từ C xuống đáy bể, tia Oz chứa điểm B , đơn vị trên các trục là mét.

Ta có: $A(1; 0; 0,4)$, $B(0; 0; 0,44)$, $C(0; 1; 0,48)$.

a) Vì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên ta tính được $D = (1; 1; 0,44)$. Do đó khoảng cách từ D đến đáy bể là 44 cm.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 0,04)$, $\overrightarrow{BC} = (0; 1; 0,04)$.

Đặt $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = (-0,04; 0,04; -1)$, một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) là

$$\vec{k} = (0; 0; 1) \Rightarrow \cos((ABCD), (Oxy)) = |\cos(\vec{n}, \vec{k})| = \frac{25}{\sqrt{627}}$$

$$\Rightarrow ((ABCD), (Oxy)) \approx 3,2^\circ.$$

Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang gần bằng $3,2^\circ$.