

## **BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V**

*Thời gian thực hiện: 2 tiết (Tiết 89, 90)*

### **I. MỤC TIÊU**

#### **1. Về kiến thức, kĩ năng**

- Ôn tập lại toàn bộ kiến thức, kĩ năng của chương V liên quan đến phương trình đường thẳng, phương trình mặt phẳng, phương trình mặt cầu, các công thức tính góc.
- Ôn tập lại cách viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu; nhận biết vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng; tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng song song.
- Vận dụng được các kiến thức về phương trình mặt phẳng, phương trình đường thẳng, phương trình mặt cầu, các công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, các công thức tính góc, vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng vào một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

#### **2. Về năng lực**

- Rèn luyện các năng lực toán học, nói riêng là năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

#### **3. Về phẩm chất**

- Góp phần giúp HS rèn luyện và phát triển các phẩm chất tốt đẹp (yêu nước, nhân ái, chăm chỉ, trung thực, trách nhiệm):
- + Tích cực phát biểu, xây dựng bài và tham gia các hoạt động nhóm;
  - + Có ý thức tích cực tìm tòi, sáng tạo trong học tập; phát huy điểm mạnh, khắc phục các điểm yếu của bản thân.

### **II. THIẾT BỊ DẠY HỌC VÀ HỌC LIỆU**

#### **- Giáo viên:**

- + Giáo án, bảng phụ, máy chiếu (nếu có),...

#### **- Học sinh:**

- + SGK, vở ghi, dụng cụ học tập.

### **III. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC**

Bài học này dạy trong 02 tiết:

- + Tiết 1: Ôn tập lí thuyết và cách viết phương trình mặt phẳng, phương trình đường thẳng, phương trình mặt cầu.
- + Tiết 2: Ôn tập lại về vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, hai mặt phẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, các công thức tính góc.

## TIẾT 1. ÔN TẬP LÍ THUYẾT VÀ CÁCH VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG, PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG, PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

| Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động | Mục tiêu cần đạt                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>HOẠT ĐỘNG KHỞI ĐỘNG</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                              |                                                                                                       |
| <p><b>Mục tiêu:</b> Nhắc lại toàn bộ lí thuyết của chương 5.</p> <p><b>Nội dung:</b> Học sinh thực hành vẽ sơ đồ tư duy để tổng hợp kiến thức.</p> <p><b>Sản phẩm:</b> Câu trả lời của HS.</p> <p><b>Tổ chức hoạt động:</b> HS làm việc nhóm, dưới sự hướng dẫn của GV.</p>                                                                                                                                                    |                                              |                                                                                                       |
| <p><b>Hoạt động khởi động (10 phút)</b></p> <p>- GV chia lớp thành 4 nhóm, HS hoạt động theo nhóm, vẽ sơ đồ tư duy tổng hợp lại toàn bộ lí thuyết chương 5: phương trình mặt phẳng, phương trình đường thẳng, phương trình mặt cầu, các công thức tính góc, khoảng cách, xét vị trí tương đối giữa các đối tượng.</p> <p>- Sau đó, 4 nhóm sẽ trình bày sản phẩm của nhóm mình trên bảng, các nhóm khác theo dõi, nhận xét.</p> | HS thực hiện vẽ sơ đồ tư duy.                | <p>- HS nhớ lại lí thuyết của chương 5.</p> <p>- Góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học.</p> |
| <b>HOẠT ĐỘNG LUYỆN TẬP</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                              |                                                                                                       |
| <p><b>Mục tiêu:</b> Giúp HS rèn luyện kĩ năng viết phương trình mặt phẳng, phương trình đường thẳng, phương trình mặt cầu.</p> <p><b>Nội dung:</b> HS thực hiện các bài tập trong bài Ôn tập chương.</p> <p><b>Sản phẩm:</b> Lời giải của các bài tập.</p> <p><b>Tổ chức thực hiện:</b> HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.</p>                                                                                    |                                              |                                                                                                       |
| <p><b>Trắc nghiệm (15 phút)</b></p> <p>- GV tổ chức cho HS làm các câu hỏi trong phần Trắc nghiệm.</p> <p>- GV cho HS hoạt động cá nhân trong 12 phút, sau đó gọi HS lên</p>                                                                                                                                                                                                                                                   | HS thực hiện bài tập Trắc nghiệm.            | - Mục đích của phần này là để HS luyện tập tổng hợp các kiến thức đã học ở chương V.                  |

| Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh                                                                                                                            | Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động | Mục tiêu cần đạt                                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| bảng làm bài, các HS khác theo dõi bài làm, nhận xét và góp ý; GV tổng kết.                                                                                                             |                                              | - Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.                                                                                                                                                                                                     |
| <p><b>Bài tập 5.40 (10 phút)</b></p> <p>GV tổ chức cho HS làm việc cá nhân trong 8 phút, sau đó gọi 4 HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi và nhận xét.</p>                      | HS làm Bài tập 5.40 và ghi bài.              | <p>- Mục đích của phần này là rèn luyện cho HS kỹ năng viết phương trình mặt phẳng, phương trình đường thẳng và phương trình mặt cầu.</p> <p>- Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.</p>                                                    |
| <p><b>Bài tập 5.42 (8 phút)</b></p> <p>GV tổ chức cho HS làm việc cá nhân trong 6 phút, sau đó gọi 3 HS trả lời câu hỏi, các HS khác theo dõi và nhận xét. GV nhận xét và tổng kết.</p> | HS làm Bài tập 5.42 và ghi bài.              | <p>- Mục đích của phần này là rèn luyện cho HS kỹ năng viết phương trình mặt phẳng song song hoặc vuông góc với một mặt phẳng cho trước, tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.</p> <p>- Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.</p> |

### TỔNG KẾT VÀ HƯỚNG DẪN CÔNG VIỆC Ở NHÀ

GV tổng kết lại nội dung bài học và dặn dò công việc ở nhà cho HS (2 phút)

- GV tổng kết lại các kiến thức trọng tâm của bài học: Ôn tập lại về cách viết phương trình mặt phẳng, phương trình đường thẳng, phương trình mặt cầu.
- Giao cho HS làm các bài tập sau trong SGK: Bài tập 5.41, 5.43, 5.44.
- Nhắc HS đọc trước bài mới chuẩn bị cho tiết học sau.

## Tiết 2. ÔN TẬP VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG, HAI MẶT PHẪNG, GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG, CÁC CÔNG THỨC TÍNH GÓC

| Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động | Mục tiêu cần đạt                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>HOẠT ĐỘNG LUYỆN TẬP</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p><b>Mục tiêu:</b> Giúp HS rèn luyện kỹ năng viết phương trình đường thẳng, phương trình mặt phẳng, xét vị trí tương đối, tính góc giữa hai đường thẳng.</p> <p><b>Nội dung:</b> HS thực hiện các bài tập trong bài Ôn tập chương.</p> <p><b>Sản phẩm:</b> Lời giải của các bài tập.</p> <p><b>Tổ chức thực hiện:</b> HS hoạt động cá nhân, dưới sự hướng dẫn của GV.</p> |                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p><b>Bài tập 5.43 (10 phút)</b></p> <p>GV tổ chức cho HS làm việc cá nhân, sau đó gọi 4 HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi và nhận xét. GV nhận xét và tổng kết.</p>                                                                                                                                                                                             | HS làm Bài tập 5.43 và ghi bài.              | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Mục đích của phần này là rèn luyện cho HS kỹ năng xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, viết được phương trình đường thẳng và phương trình mặt phẳng, tìm được giao điểm giữa đường thẳng và mặt phẳng.</li> <li>- Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.</li> </ul> |
| <p><b>Bài tập 5.47 (8 phút)</b></p> <p>GV tổ chức cho HS làm việc cá nhân, sau đó gọi 2 HS lên bảng trình bày, các HS khác theo dõi và nhận xét. GV nhận xét và tổng kết.</p>                                                                                                                                                                                              | HS làm Bài tập 5.47 và ghi bài.              | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Mục đích của phần này là rèn luyện cho HS kỹ năng xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, tính góc giữa hai đường thẳng.</li> <li>- Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.</li> </ul>                                                                                 |
| <b>HOẠT ĐỘNG VẬN DỤNG</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |

| Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh                                                                                                                                                                                                                                                            | Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động | Mục tiêu cần đạt                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Mục tiêu:</b> HS vận dụng được kiến thức kỹ năng trong chương 5 để giải quyết một số vấn đề thực tế.</p> <p><b>Nội dung:</b> HS thực hiện các bài tập trong bài Ôn tập chương.</p> <p><b>Sản phẩm:</b> Lời giải của các bài tập.</p> <p><b>Tổ chức hoạt động:</b> HS làm việc nhóm, dưới sự hướng dẫn của GV.</p> |                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p><b>Bài tập 5.50 (10 phút)</b></p> <p>GV chia lớp thành các nhóm đôi, tổ chức cho HS làm việc nhóm trong 8 phút, sau đó đại diện các nhóm sẽ trình bày trên bảng. Các nhóm khác theo dõi, nhận xét. GV nhận xét và tổng kết.</p>                                                                                      | <p>HS làm Bài tập 5.50 và ghi bài.</p>       | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Mục đích của phần này là rèn luyện cho HS kỹ năng vận dụng kiến thức của chương để tính được góc giữa hai mặt phẳng trong thực tế.</li> <li>- Góp phần phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học, năng lực giao tiếp toán học, năng lực mô hình hóa toán học.</li> </ul>            |
| <p><b>Bài tập 5.51 (7 phút)</b></p> <p>GV chia lớp thành các nhóm đôi, tổ chức cho HS làm việc nhóm trong 5 phút, sau đó đại diện các nhóm sẽ trình bày trên bảng. Các nhóm khác theo dõi, nhận xét. GV nhận xét và tổng kết.</p>                                                                                       | <p>HS làm Bài tập 5.51 và ghi bài.</p>       | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Mục đích của phần này là rèn luyện cho HS kỹ năng vận dụng kiến thức của chương để tính được góc giữa đường thẳng và mặt phẳng trong thực tế.</li> <li>- Góp phần phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học, năng lực giao tiếp toán học, năng lực mô hình hóa toán học.</li> </ul> |
| <p><b>Bài tập 5.52 (8 phút)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- GV chia lớp thành 4 nhóm, tổ chức cho HS làm việc nhóm trong 6 phút, sau đó các nhóm sẽ trình bày trên bảng. Các nhóm khác theo dõi, nhận xét. GV nhận xét và tổng kết.</li> </ul>                                                         | <p>HS làm Bài tập 5.52 và ghi bài.</p>       | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Mục đích của phần này là rèn luyện cho HS kỹ năng vận dụng kiến thức của chương để tính được khoảng cách trong thực tế mà ta không đo được trực tiếp.</li> </ul>                                                                                                                         |

| Nội dung, phương thức tổ chức hoạt động học tập của học sinh                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Dự kiến sản phẩm, đánh giá kết quả hoạt động | Mục tiêu cần đạt                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                              | - Góp phần phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học, năng lực giao tiếp toán học, năng lực mô hình hóa toán học. |
| <div style="text-align: center; background-color: #0056b3; color: white; padding: 5px;"><b>TỔNG KẾT VÀ HƯỚNG DẪN CÔNG VIỆC Ở NHÀ</b></div> <p><i>GV tổng kết lại nội dung bài học và dặn dò công việc ở nhà cho HS (2 phút)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- GV tổng kết lại các kiến thức trọng tâm của bài học: Ôn tập lại về vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, hai mặt phẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, các công thức tính góc.</li> <li>- Giao cho HS làm các bài tập sau trong SGK: Các bài tập còn lại trong SGK ở phần ôn tập cuối chương.</li> <li>- Nhắc HS đọc trước bài mới chuẩn bị cho tiết học sau.</li> </ul> |                                              |                                                                                                                        |

### BÀI TẬP CUỐI BÀI TRONG SGK VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

5.31. D                      5.32. D                      5.33. B                      5.34. C                      5.35. C

5.36. D                      5.37. A                      5.38. C                      5.39. A

5.40. a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 3)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-2; -2; 4)$  nên

$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 2(5; -1; 2)$  là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$$5(x-1) - 1(y-0) + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow 5x - y + 2z - 3 = 0.$$

b)  $\overrightarrow{AC} = (-2; -2; 4) = -2(1; 1; -2)$  là một vector chỉ phương của đường thẳng AC nên phương

trình chính tắc của đường thẳng AC là  $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$ .

c) Trung điểm của AC là  $I = (0; -1; 1)$ , bán kính của mặt cầu đường kính AC là

$$R = \frac{AC}{2} = \sqrt{6}. \text{ Phương trình mặt cầu là } x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 6.$$

d) Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính là  $R = AB = \sqrt{19}$ . Phương trình mặt cầu cần tìm là  $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 19$ .

5.41. Vì đường thẳng d có một vector chỉ phương  $\vec{u} = (1; 1; -2)$  và d đi qua  $A(1; -2; 4)$ ,

ta có  $\overrightarrow{OA} = (1; -2; 4)$  nên  $\vec{n} = [\vec{u}, \overrightarrow{OA}] = -3(0; 2; 1)$  là một vector pháp tuyến của mặt phẳng chứa  $d$  và gốc toạ độ  $O$ , phương trình mặt phẳng chứa  $d$  và gốc toạ độ  $O$  là:

$$0(x-0) + 2(y-0) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2y + z = 0.$$

5.42. a) Ta có:  $d(A, (P)) = \frac{|1+2+4-1|}{\sqrt{1+4+4}} = 2.$

b) Mặt phẳng  $(Q)$  song song với  $(P)$  có một vector pháp tuyến là  $(1; -2; 2)$ , mặt phẳng  $(Q)$  đi qua  $A(1; -1; 2)$ . Phương trình mặt phẳng  $(Q)$  là

$$1(x-1) - 2(y+1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z - 7 = 0.$$

c) Mặt phẳng  $(P)$  có một vector pháp tuyến là  $\vec{n} = (1; -2; 2)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; -2)$ , do đó mặt phẳng  $(R)$  có một vector pháp tuyến là  $[\vec{n}, \overrightarrow{AB}] = -2(0; 1; 1)$ .

Phương trình  $(R)$  là  $0(x-1) + 1(y+1) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow y + z - 1 = 0.$

5.43. a) Đường thẳng  $d$  đi qua  $M(0; 1; 0)$  và có một vector chỉ phương là  $\vec{u} = (1; 2; 2)$ , đường thẳng  $d'$  đi qua  $N(-1; -2; 3)$  và có một vector chỉ phương là  $\vec{v} = (2; 2; -1)$ .

Đặt  $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-6; 5; -2)$ .

Ta có  $\overrightarrow{MN} = (-1; -3; 3) \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 6 - 15 - 6 = -15 \neq 0$  suy ra  $d$  và  $d'$  chéo nhau.

b) Đường thẳng  $\Delta$  song song với  $d$  và  $\Delta$  đi qua  $A(1; 0; 2)$ , đường thẳng  $\Delta$  có một vector chỉ phương là  $\vec{u} = (1; 2; 2)$ . Phương trình đường thẳng  $\Delta$  là  $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2}.$

c) Mặt phẳng  $(P)$  chứa  $A$  và đường thẳng  $d$  nên chứa điểm  $M$ , ta có  $\vec{u} = (1; 2; 2)$ ,  $\overrightarrow{AM} = (-1; 1; -2)$ , mặt phẳng  $(P)$  có một vector pháp tuyến là  $[\vec{u}, \overrightarrow{AM}] = -3(2; 0; -1)$ .

Phương trình mặt phẳng  $(P)$  là  $2(x-1) + 0(y-0) - 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - z = 0.$

d) Phương trình mặt phẳng  $(Oxz)$  là  $y = 0$ , phương trình đường thẳng  $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2},$

từ phương trình đường thẳng  $d$ , ta cho  $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}; z = -1.$

Toạ độ giao điểm của  $d$  và  $(Oxz)$  là  $\left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right).$

**5.44.** Mặt phẳng  $(P)$  có một vector pháp tuyến là  $\vec{n}_p = (1; -2; -2)$ , đường thẳng  $d$  có một vector chỉ phương là  $\vec{u}_d = (2; 1; -1)$ , do đó  $\vec{n}_Q = [\vec{n}_p, \vec{u}_d] = (4; -3; 5)$  là một vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(Q)$  chứa  $d$  và vuông góc với  $(P)$ .

$$\begin{aligned}\text{Phương trình mặt phẳng } (Q) \text{ là: } 4(x-1) - 3(y+1) + 5(z-0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x - 3y + 5z - 7 &= 0.\end{aligned}$$

**5.45.** Đường thẳng  $d$  có một vector chỉ phương là  $\vec{u}_d = (1; 2; -1)$ , đi qua  $M(-1; 1; 0)$ .

Đường thẳng  $d'$  có một vector chỉ phương là  $\vec{u}_{d'} = (1; 1; 2)$ , đi qua  $N(1; 2; -1)$ .

Vì mặt phẳng  $(P)$  chứa  $d$  và song song với  $d'$  nên mặt phẳng  $(P)$  có một vector pháp tuyến là  $\vec{n}_p = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] = (5; -3; -1)$ .

$$\begin{aligned}\text{Phương trình mặt phẳng } (P) \text{ là } 5(x+1) - 3(y-1) - 1(z-0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5x - 3y - z + 8 &= 0.\end{aligned}$$

**5.46.** Một vector pháp tuyến của  $(P)$  là  $\vec{n}_p = (1; -1; -1)$ , một vector pháp tuyến của  $(Q)$  là  $\vec{n}_Q = (2; 1; -1)$ .

Vì mặt phẳng  $(R)$  vuông góc với cả  $(P)$  và  $(Q)$  nên  $(R)$  có một vector pháp tuyến là

$$\vec{n}_R = [\vec{n}_p, \vec{n}_Q] = (2; -1; 3).$$

$$\begin{aligned}\text{Phương trình mặt phẳng } (R) \text{ là: } 2(x+1) - 1(y-2) + 3(z-0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x - y + 3z + 4 &= 0.\end{aligned}$$

**5.47. a)** Đường thẳng  $d$  có một vector chỉ phương là  $\vec{u}_d = (1; 2; -2)$ , đi qua điểm  $A(-2; -3; 3)$ .

Đường thẳng  $d'$  có một vector chỉ phương là  $\vec{u}_{d'} = (-1; 1; 2)$ , đi qua điểm  $B(1; -2; 0)$ .

$$\text{Ta có } [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] = (6; 0; 3), \vec{AB} = (3; 1; -3) \Rightarrow [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] \cdot \vec{AB} = 9 \neq 0.$$

Do đó hai đường thẳng  $d, d'$  chéo nhau.

$$\text{b) Ta có } \cos(d, d') = \left| \cos(\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}) \right| = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow (d, d') \approx 66^\circ.$$

**5.48.** Đường thẳng  $d$  có một vector chỉ phương là  $\vec{u} = (2; -2; 1)$ , mặt phẳng  $(P)$  có một vector pháp tuyến là  $\vec{n} = (1; 1; -2)$ . Ta có  $\sin(d, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{\sqrt{6}}{9} \Rightarrow (d, (P)) \approx 15,8^\circ$ .

**5.49.** Ta có:  $\vec{n}_p = (1; 1; 1)$  là một vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và  $\vec{n}_{Oxy} = (0; 0; 1)$  là một vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(Oxy)$ .

Do đó  $\cos((P), (Oxy)) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow ((P), (Oxy)) \approx 54,74^\circ$ .

**5.50.** Gọi 3 vị trí trên mặt hồ là  $A, B, C$  thì tam giác  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2 m. Gọi dây dọi lần lượt là  $AA', BB', CC'$  có độ dài lần lượt là 4 m; 4,4 m; 4,8 m.

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  sao cho  $O$  là trung điểm của  $BC$ , tia  $Ox$  chứa điểm  $A$ , tia  $Oy$  chứa điểm  $B$ , tia  $Oz$  đi qua trung điểm của  $B'C'$  và đơn vị trên các trục là mét.

Ta có:

$$OB = OC = 1, OA = \sqrt{3} \Rightarrow A' = (\sqrt{3}; 0; 4), B' = (0; 1; 4,4), C' = (0; -1; 4,8)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (-\sqrt{3}; 1; 0,4), \overrightarrow{A'C'} = (-\sqrt{3}; -1; 0,8).$$

Mặt phẳng  $(A'B'C')$  có một vector pháp tuyến là

$$\vec{n} = [\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}] = 0,4\sqrt{3}(\sqrt{3}; 1; 5).$$

Mặt phẳng  $(ABC)$  có một vector pháp tuyến là  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .

Do đó  $\cos((ABC), (A'B'C')) = |\cos(\vec{n}, \vec{k})| = \frac{5}{\sqrt{29}}$ . Góc cần tìm gần bằng  $21,8^\circ$ .

**5.51.** Ta có  $\overrightarrow{AB} = (4; 4; -1)$ , mặt phẳng  $(Oxy)$  có một vector pháp tuyến là  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .

Khi đó  $\sin(AB, (Oxy)) = |\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{k})| = \frac{1}{\sqrt{33}} \Rightarrow (AB, (Oxy)) \approx 10^\circ$ .

**5.52.** Ta có: Bán kính  $OA = 1$  và  $OB = \sqrt{3} \Rightarrow AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{2}$ .